```
Ramsey  THM

⊢  ∀k:ℕ+, L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k)  by InductionOnNat
|
|\
| 1. k : ℤ
| 2. 0<k
| 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
| 4. k = 1
| 5. 0<1
| 6. L : ℕ List
| 7. 0<||L||
| ⊢  ∃r:ℕ+. r->L^1
| | by Inst
| |    Thm* ∀L:ℕ List. sum(L[i]-1 | i < ||L||)+1->L^1
| |    {Ramsey_DASH_base_DASH_case}
| |    [L]
| |
| 1. k : ℤ
| 2. 0<k
| 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
| 4. k = 1
| 5. 0<1
| 6. L : ℕ List
| 7. 0<||L||
| 8. sum(L[i]-1 | i < ||L||)+1->L^1
| ⊢  ∃r:ℕ+. r->L^1  by Decide (0<sum(L[i]-1 | i < ||L||)+1)
| |
| |\
| | 1. k : ℤ
| | 2. 0<k
| | 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
| | 4. k = 1
| | 5. 0<1
| | 6. L : ℕ List
| | 7. 0<||L||
| | 8. sum(L[i]-1 | i < ||L||)+1->L^1
| | 9. 0<sum(L[i]-1 | i < ||L||)+1
| | ⊢  ∃r:ℕ+. r->L^1  by InstConcl [sum(L[i]-1 | i < ||L||)+1]
| |
| .\
| . 1. k : ℤ
| . 2. 0<k
| . 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
| . 4. k = 1
| . 5. 0<1
| . 6. L : ℕ List
| . 7. 0<||L||
| . 8. sum(L[i]-1 | i < ||L||)+1->L^1
| . 9. ¬0<sum(L[i]-1 | i < ||L||)+1
| . ⊢  ∃r:ℕ+. r->L^1  by InstConcl [1]
| . |
| . 1. k : ℤ
| . 2. 0<k
| . 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
```

```
| . 4. k = 1
| . 5. 0<1
| . 6. L : ℕ List
| . 7. 0<||L||
| . 8. sum(L[i]-1 | i < ||L||)+1->L^1
| . 9. ¬0<sum(L[i]-1 | i < ||L||)+1
| . ⊢  1->L^1
| .   by BLemma'
| .      Thm* ∀k:ℕ+, L:ℕ List, r1,r2:ℤ. r1≤r2 ⇒ r1->L^k ⇒ r2->L^k
| .      {arrows_DASH_monotone1}
|
.\
. 1. k : ℤ
. 2. 0<k
. 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. 4. ¬k = 1
. 5. 0<k
. 6. L : ℕ List
. 7. 0<||L||
. ⊢  ∃r:ℕ+. r->L^k
. | by (((RepeatFor 2 (MoveToConcl -1))
. |      THEN
. |      (InductionOn (d = sum(L[i] | i < ||L||)) CompNatInd))
. |     THENA
. |     ((Try (Fold `member` 0)) THEN Analyze
. |      THEN
. |      (BackThru
. |       Thm* ∀n:ℕ, f:(ℕn→ℤ). (∀x:ℕn. 0≤f(x)) ⇒ 0≤sum(f(x) | x < n)
. |       {non_neg_sum})))
. |    THEN
. |    (Try
. |     (BackThru
. |      Thm* ∀n:ℕ, f:(ℕn→ℤ). (∀x:ℕn. 0≤f(x)) ⇒ 0≤sum(f(x) | x < n)
. |      {non_neg_sum}))
. |
. 1. k : ℤ
. 2. 0<k
. 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. 4. ¬k = 1
. 5. 0<k
. 6. d : ℕ
. 7. ∀d1:ℕ.
. |  d1<d
. |  ⇒
. |  (∀L:ℕ List.
. |   sum(L[i] | i < ||L||) = d1 ⇒ 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. 8. L : ℕ List
. 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. 10. 0<||L||
. ⊢  ∃r:ℕ+. r->L^k  by Decide (∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. |
. |\
. | 1. k : ℤ
. | 2. 0<k
. | 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
```

```
. | 4. ¬k = 1
. | 5. 0<k
. | 6. d : ℕ
. | 7. ∀d1:ℕ.
. |    d1<d
. |    ⇒
. |    (∀L:ℕ List.
. |     sum(L[i] | i < ||L||) = d1 ⇒ 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. | 8. L : ℕ List
. | 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. | 10. 0<||L||
. | 11. ∃i:ℕ||L||. L[i]<k
. | ⊢  ∃r:ℕ+. r->L^k
. |   by (InstConcl [k-1])
. |      THEN
. |      (BackThru
. |       Thm* ∀k:ℕ+, L:ℕ List. k-1->L^k ⟺ (∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. |       {trivial_DASH_arrows})
. |
. .\
. . 1. k : ℤ
. . 2. 0<k
. . 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . 4. ¬k = 1
. . 5. 0<k
. . 6. d : ℕ
. . 7. ∀d1:ℕ.
. . |  d1<d
. . |  ⇒
. . |  (∀L:ℕ List.
. . |   sum(L[i] | i < ||L||) = d1 ⇒ 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . 8. L : ℕ List
. . 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . 10. 0<||L||
. . 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . ⊢  ∃r:ℕ+. r->L^k  by Assert (∀i:ℕ||L||. 2≤L[i])
. . |
. . |\
. . | .....assertion .....
. . | 1. k : ℤ
. . | 2. 0<k
. . | 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . | 4. ¬k = 1
. . | 5. 0<k
. . | 6. d : ℕ
. . | 7. ∀d1:ℕ.
. . |    d1<d
. . |    ⇒
. . |    (∀L:ℕ List.
. . |     sum(L[i] | i < ||L||) = d1 ⇒ 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . | 8. L : ℕ List
. . | 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . | 10. 0<||L||
. . | 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . | ⊢  ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
```

```
. . |   by Auto THEN SupposeNot THEN (Analyze -3)
. . |      THEN
. . |      (InstConcl [i])
. . |
. . .\
. . . 1. k : ℤ
. . . 2. 0<k
. . . 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . 4. ¬k = 1
. . . 5. 0<k
. . . 6. d : ℕ
. . . 7. ∀d1:ℕ.
. . . |  d1<d
. . . |  ⇒
. . . |  (∀L:ℕ List.
. . . |   sum(L[i] | i < ||L||) = d1 ⇒ 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . . 8. L : ℕ List
. . . 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . 10. 0<||L||
. . . 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . ⊢  ∃r:ℕ+. r->L^k  by InstHyp [d-1] -6
. . . |
. . . |\
. . . | .....set predicate .....
. . . | 1. k : ℤ
. . . | 2. 0<k
. . . | 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . | 4. ¬k = 1
. . . | 5. 0<k
. . . | 6. d : ℕ
. . . | 7. ∀d1:ℕ.
. . . |    d1<d
. . . |    ⇒
. . . |    (∀L:ℕ List.
. . . |     sum(L[i] | i < ||L||) = d1 ⇒ 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . . | 8. L : ℕ List
. . . | 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . | 10. 0<||L||
. . . | 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . | 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . | ⊢  0≤d-1
. . . |   by FwdThru
. . . |      Thm* ∀k,b:ℕ, f:(ℕk→ℤ).
. . . |           (∀x:ℕk. b≤f(x)) ⇒ b·k≤sum(f(x) | x < k)
. . . |      {sum_lower_bound}
. . . |      [-1]
. . . |
. . . .\
. . . . 1. k : ℤ
. . . . 2. 0<k
. . . . 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . . 4. ¬k = 1
. . . . 5. 0<k
. . . . 6. d : ℕ
```

```
. . . . 7. ∀d1:ℕ.
. . . . |  d1<d
. . . . |  ⇒
. . . . |  (∀L:ℕ List.
. . . . |   sum(L[i] | i < ||L||) = d1 ⇒ 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . . . 8. L : ℕ List
. . . . 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . . 10. 0<||L||
. . . . 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . . 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . . 13. ∀L:ℕ List.
. . . . |   sum(L[i] | i < ||L||) = d-1 ⇒ 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k)
. . . . ⊢  ∃r:ℕ+. r->L^k  by Assert (∀i:ℕ||L||. ∃r:ℕ+. r->L[i--]^k)
. . . . |
. . . . |\
. . . . | .....assertion .....
. . . . | 1. k : ℤ
. . . . | 2. 0<k
. . . . | 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . . | 4. ¬k = 1
. . . . | 5. 0<k
. . . . | 6. d : ℕ
. . . . | 7. ∀d1:ℕ.
. . . . | |  d1<d
. . . . | |  ⇒
. . . . | |  (∀L:ℕ List.
. . . . | |   sum(L[i] | i < ||L||) = d1
. . . . | |   ⇒
. . . . | |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . . . | 8. L : ℕ List
. . . . | 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . . | 10. 0<||L||
. . . . | 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . . | 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . . | 13. ∀L:ℕ List.
. . . . | |   sum(L[i] | i < ||L||) = d-1
. . . . | |   ⇒
. . . . | |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k)
. . . . | ⊢  ∀i:ℕ||L||. ∃r:ℕ+. r->L[i--]^k
. . . . | | by Auto THEN (InstHyp [L[i--]] -2)
. . . . | |
. . . . | |\
. . . . | | 1. k : ℤ
. . . . | | 2. 0<k
. . . . | | 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . . | | 4. ¬k = 1
. . . . | | 5. 0<k
. . . . | | 6. d : ℕ
. . . . | | 7. ∀d1:ℕ.
. . . . | |    d1<d
. . . . | |    ⇒
. . . . | |    (∀L:ℕ List.
. . . . | |     sum(L[i] | i < ||L||) = d1
. . . . | |     ⇒
. . . . | |     0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
```

```
. . . . | | 8. L : ℕ List
. . . . | | 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . . | | 10. 0<||L||
. . . . | | 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . . | | 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . . | | 13. ∀L:ℕ List.
. . . . | |     sum(L[i] | i < ||L||) = d-1
. . . . | |     ⇒
. . . . | |     0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k)
. . . . | | 14. i : ℕ||L||
. . . . | | ⊢  0<L[i]  by AutoInst [i]
. . . . | |
. . . . | |\
. . . . | | .....antecedent .....
. . . . | | 1. k : ℤ
. . . . | | 2. 0<k
. . . . | | 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . . | | 4. ¬k = 1
. . . . | | 5. 0<k
. . . . | | 6. d : ℕ
. . . . | | 7. ∀d1:ℕ.
. . . . | | |  d1<d
. . . . | | |  ⇒
. . . . | | |  (∀L:ℕ List.
. . . . | | |   sum(L[i] | i < ||L||) = d1
. . . . | | |   ⇒
. . . . | | |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . . . | | 8. L : ℕ List
. . . . | | 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . . | | 10. 0<||L||
. . . . | | 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . . | | 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . . | | 13. ∀L:ℕ List.
. . . . | | |   sum(L[i] | i < ||L||) = d-1
. . . . | | |   ⇒
. . . . | | |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k)
. . . . | | 14. i : ℕ||L||
. . . . | | ⊢  sum(L[i--][i@0] | i@0 < ||L[i--]||) = d-1
. . . . | | | by Subst' (||L[i--]|| = ||L||) 0
. . . . | | |
. . . . | | |\
. . . . | | | 1. k : ℤ
. . . . | | | 2. 0<k
. . . . | | | 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . . | | | 4. ¬k = 1
. . . . | | | 5. 0<k
. . . . | | | 6. d : ℕ
. . . . | | | 7. ∀d1:ℕ.
. . . . | | |    d1<d
. . . . | | |    ⇒
. . . . | | |    (∀L:ℕ List.
. . . . | | |     sum(L[i] | i < ||L||) = d1
. . . . | | |     ⇒
. . . . | | |     0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . . . | | | 8. L : ℕ List
```

```
. . . . | | | 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . . | | | 10. 0<||L||
. . . . | | | 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . . | | | 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . . | | | 13. ∀L:ℕ List.
. . . . | | |     sum(L[i] | i < ||L||) = d-1
. . . . | | |     ⇒
. . . . | | |     0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k)
. . . . | | | 14. i : ℕ||L||
. . . . | | | ⊢  0<L[i]  by AutoInst [i]
. . . . | | |
. . . . | | |\
. . . . | | | 1. k : ℤ
. . . . | | | 2. 0<k
. . . . | | | 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . . | | | 4. ¬k = 1
. . . . | | | 5. 0<k
. . . . | | | 6. d : ℕ
. . . . | | | 7. ∀d1:ℕ.
. . . . | | | |  d1<d
. . . . | | | |  ⇒
. . . . | | | |  (∀L:ℕ List.
. . . . | | | |   sum(L[i] | i < ||L||) = d1
. . . . | | | |   ⇒
. . . . | | | |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . . . | | | 8. L : ℕ List
. . . . | | | 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . . | | | 10. 0<||L||
. . . . | | | 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . . | | | 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . . | | | 13. ∀L:ℕ List.
. . . . | | | |   sum(L[i] | i < ||L||) = d-1
. . . . | | | |   ⇒
. . . . | | | |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k)
. . . . | | | 14. i : ℕ||L||
. . . . | | | ⊢  ||L[i--]|| = ||L||
. . . . | | | | by RWO
. . . . | | | |    Thm* ∀L:ℕ List, i:ℕ||L||.
. . . . | | | |          0<L[i] ⇒ ||L[i--]|| = ||L|| ∈ ℤ
. . . . | | | |    {list_DASH_dec_DASH_length}
. . . . | | | |    0
. . . . | | | |
. . . . | | | .....rewrite subgoal .....
. . . . | | | 1. k : ℤ
. . . . | | | 2. 0<k
. . . . | | | 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . . | | | 4. ¬k = 1
. . . . | | | 5. 0<k
. . . . | | | 6. d : ℕ
. . . . | | | 7. ∀d1:ℕ.
. . . . | | |    d1<d
. . . . | | |    ⇒
. . . . | | |    (∀L:ℕ List.
. . . . | | |     sum(L[i] | i < ||L||) = d1
. . . . | | |     ⇒
```

```
. . . . | | |     0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . . . | | | 8. L : ℕ List
. . . . | | | 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . . | | | 10. 0<||L||
. . . . | | | 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . . | | | 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . . | | | 13. ∀L:ℕ List.
. . . . | | |     sum(L[i] | i < ||L||) = d-1
. . . . | | |     ⇒
. . . . | | |     0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k)
. . . . | | | 14. i : ℕ||L||
. . . . | | | ⊢  0<L[i]  by AutoInst [i]
. . . . | | |
. . . . | | .\
. . . . | | . 1. k : ℤ
. . . . | | . 2. 0<k
. . . . | | . 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . . | | . 4. ¬k = 1
. . . . | | . 5. 0<k
. . . . | | . 6. d : ℕ
. . . . | | . 7. ∀d1:ℕ.
. . . . | | . |  d1<d
. . . . | | . |  ⇒
. . . . | | . |  (∀L:ℕ List.
. . . . | | . |   sum(L[i] | i < ||L||) = d1
. . . . | | . |   ⇒
. . . . | | . |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . . . | | . 8. L : ℕ List
. . . . | | . 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . . | | . 10. 0<||L||
. . . . | | . 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . . | | . 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . . | | . 13. ∀L:ℕ List.
. . . . | | . |   sum(L[i] | i < ||L||) = d-1
. . . . | | . |   ⇒
. . . . | | . |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k)
. . . . | | . 14. i : ℕ||L||
. . . . | | . ⊢  sum(L[i--][i@0] | i@0 < ||L||) = d-1
. . . . | | . | by (Inst
. . . . | | . |     Thm* ∀n:ℕ, f,g:(ℕn→ℤ), d:ℤ.
. . . . | | . |          sum(f(x)-g(x) | x < n) = d
. . . . | | . |          ⇒
. . . . | | . |          sum(f(x) | x < n) = sum(g(x) | x < n)+d
. . . . | | . |     {sum_difference}
. . . . | | . |     [||L||;λ2j. L[j];λ2j. L[i--][j]])
. . . . | | . |    THENA
. . . . | | . |    (Auto THEN (AutoInst [i])
. . . . | | . |     THEN
. . . . | | . |     (RWO
. . . . | | . |      Thm* ∀L:ℕ List, i:ℕ||L||.
. . . . | | . |           0<L[i] ⇒ ||L[i--]|| = ||L|| ∈ ℤ
. . . . | | . |      {list_DASH_dec_DASH_length}
. . . . | | . |      0)
. . . . | | . |     THEN
. . . . | | . |     (AutoInst [i]))
```

```
. . . . | | . |
. . . . | | . 1. k : ℤ
. . . . | | . 2. 0<k
. . . . | | . 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . . | | . 4. ¬k = 1
. . . . | | . 5. 0<k
. . . . | | . 6. d : ℕ
. . . . | | . 7. ∀d1:ℕ.
. . . . | | . |  d1<d
. . . . | | . |  ⇒
. . . . | | . |  (∀L:ℕ List.
. . . . | | . |   sum(L[i] | i < ||L||) = d1
. . . . | | . |   ⇒
. . . . | | . |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . . . | | . 8. L : ℕ List
. . . . | | . 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . . | | . 10. 0<||L||
. . . . | | . 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . . | | . 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . . | | . 13. ∀L:ℕ List.
. . . . | | . |   sum(L[i] | i < ||L||) = d-1
. . . . | | . |   ⇒
. . . . | | . |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k)
. . . . | | . 14. i : ℕ||L||
. . . . | | . 15. ∀d:ℤ.
. . . . | | . |   sum(L[x]-L[i--][x] | x < ||L||) = d
. . . . | | . |   ⇒
. . . . | | . |   sum(L[x] | x < ||L||) = sum(L[i--][x] | x < ||L||)+d
. . . . | | . ⊢  sum(L[i--][i@0] | i@0 < ||L||) = d-1
. . . . | | . | by InstHyp [1] -1
. . . . | | . |
. . . . | | . |\
. . . . | | . | .....antecedent .....
. . . . | | . | 1. k : ℤ
. . . . | | . | 2. 0<k
. . . . | | . | 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . . | | . | 4. ¬k = 1
. . . . | | . | 5. 0<k
. . . . | | . | 6. d : ℕ
. . . . | | . | 7. ∀d1:ℕ.
. . . . | | . | |  d1<d
. . . . | | . | |  ⇒
. . . . | | . | |  (∀L:ℕ List.
. . . . | | . | |   sum(L[i] | i < ||L||) = d1
. . . . | | . | |   ⇒
. . . . | | . | |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . . . | | . | 8. L : ℕ List
. . . . | | . | 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . . | | . | 10. 0<||L||
. . . . | | . | 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . . | | . | 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . . | | . | 13. ∀L:ℕ List.
. . . . | | . | |   sum(L[i] | i < ||L||) = d-1
. . . . | | . | |   ⇒
. . . . | | . | |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k)
```

```
. . . . | | . | 14. i : ℕ||L||
. . . . | | . | 15. ∀d:ℤ.
. . . . | | . | |   sum(L[x]-L[i--][x] | x < ||L||) = d
. . . . | | . | |   ⇒
. . . . | | . | |   sum(L[x] | x < ||L||)
. . . . | | . | |   =
. . . . | | . | |   sum(L[i--][x] | x < ||L||)+d
. . . . | | . | ⊢  sum(L[x]-L[i--][x] | x < ||L||) = 1
. . . . | | . | | by (Inst
. . . . | | . | |     Thm* ∀n:ℕ, f:(ℕn→ℤ), m:ℕn.
. . . . | | . | |          (∀x:ℕn. ¬x = m ⇒ f(x) = 0)
. . . . | | . | |          ⇒
. . . . | | . | |          sum(f(x) | x < n) = f(m)
. . . . | | . | |     {singleton_support_sum}
. . . . | | . | |     [||L||;λ2x. L[x]-L[i--][x];i])
. . . . | | . | |    THEN
. . . . | | . | |    (AutoInst [i])
. . . . | | . | |    THEN
. . . . | | . | |    (Try
. . . . | | . | |     ((RWO
. . . . | | . | |       Thm* ∀L:ℕ List, i:ℕ||L||.
. . . . | | . | |             0<L[i] ⇒ ||L[i--]|| = ||L|| ∈ ℤ
. . . . | | . | |       {list_DASH_dec_DASH_length}
. . . . | | . | |       0)
. . . . | | . | |      THEN
. . . . | | . | |      (AutoInst [i])))
. . . . | | . | |
. . . . | | . | |\
. . . . | | . | | 1. k : ℤ
. . . . | | . | | 2. 0<k
. . . . | | . | | 3. 0<k-1
. . . . | | . | |    ⇒
. . . . | | . | |    (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . . | | . | | 4. ¬k = 1
. . . . | | . | | 5. 0<k
. . . . | | . | | 6. d : ℕ
. . . . | | . | | 7. ∀d1:ℕ.
. . . . | | . | |    d1<d
. . . . | | . | |    ⇒
. . . . | | . | |    (∀L:ℕ List.
. . . . | | . | |     sum(L[i] | i < ||L||) = d1
. . . . | | . | |     ⇒
. . . . | | . | |     0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . . . | | . | | 8. L : ℕ List
. . . . | | . | | 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . . | | . | | 10. 0<||L||
. . . . | | . | | 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . . | | . | | 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . . | | . | | 13. ∀L:ℕ List.
. . . . | | . | |     sum(L[i] | i < ||L||) = d-1
. . . . | | . | |     ⇒
. . . . | | . | |     0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k)
. . . . | | . | | 14. i : ℕ||L||
. . . . | | . | | 15. ∀d:ℤ.
. . . . | | . | |     sum(L[x]-L[i--][x] | x < ||L||) = d
```

```
. . . . | | . | |     ⇒
. . . . | | . | |     sum(L[x] | x < ||L||)
. . . . | | . | |     =
. . . . | | . | |     sum(L[i--][x] | x < ||L||)+d
. . . . | | . | | 16. x : ℕ||L||
. . . . | | . | | 17. ¬x = i
. . . . | | . | | ⊢  L[x]-L[i--][x] = 0
. . . . | | . | |   by ((RWO
. . . . | | . | |        Thm* ∀L:ℕ List, i,j:ℕ||L||.
. . . . | | . | |             0<L[i]
. . . . | | . | |             ⇒
. . . . | | . | |             L[i--][j] = if j=₂i→ L[j]-1 else L[j] fi
. . . . | | . | |        {list_DASH_dec_DASH_select}
. . . . | | . | |        0)
. . . . | | . | |       THENA
. . . . | | . | |       (Auto THEN (AutoInst [i])))
. . . . | | . | |      THEN
. . . . | | . | |      SplitOnConclITE
. . . . | | . | |
. . . . | | . | .\
. . . . | | . | . 1. k : ℤ
. . . . | | . | . 2. 0<k
. . . . | | . | . 3. 0<k-1
. . . . | | . | . |  ⇒
. . . . | | . | . |  (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . . | | . | . 4. ¬k = 1
. . . . | | . | . 5. 0<k
. . . . | | . | . 6. d : ℕ
. . . . | | . | . 7. ∀d1:ℕ.
. . . . | | . | . |  d1<d
. . . . | | . | . |  ⇒
. . . . | | . | . |  (∀L:ℕ List.
. . . . | | . | . |   sum(L[i] | i < ||L||) = d1
. . . . | | . | . |   ⇒
. . . . | | . | . |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . . . | | . | . 8. L : ℕ List
. . . . | | . | . 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . . | | . | . 10. 0<||L||
. . . . | | . | . 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . . | | . | . 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . . | | . | . 13. ∀L:ℕ List.
. . . . | | . | . |   sum(L[i] | i < ||L||) = d-1
. . . . | | . | . |   ⇒
. . . . | | . | . |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k)
. . . . | | . | . 14. i : ℕ||L||
. . . . | | . | . 15. ∀d:ℤ.
. . . . | | . | . |   sum(L[x]-L[i--][x] | x < ||L||) = d
. . . . | | . | . |   ⇒
. . . . | | . | . |   sum(L[x] | x < ||L||)
. . . . | | . | . |   =
. . . . | | . | . |   sum(L[i--][x] | x < ||L||)+d
. . . . | | . | . 16. sum(L[x]-L[i--][x] | x < ||L||) = L[i]-L[i--][i]
. . . . | | . | . ⊢  sum(L[x]-L[i--][x] | x < ||L||) = 1
. . . . | | . | . | by HypSubst' -1 0
. . . . | | . | . |
```

```
. . . . | | . | . 1. k : ℤ
. . . . | | . | . 2. 0<k
. . . . | | . | . 3. 0<k-1
. . . . | | . | .    ⇒
. . . . | | . | .    (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . . | | . | . 4. ¬k = 1
. . . . | | . | . 5. 0<k
. . . . | | . | . 6. d : ℕ
. . . . | | . | . 7. ∀d1:ℕ.
. . . . | | . | .    d1<d
. . . . | | . | .    ⇒
. . . . | | . | .    (∀L:ℕ List.
. . . . | | . | .     sum(L[i] | i < ||L||) = d1
. . . . | | . | .     ⇒
. . . . | | . | .     0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . . . | | . | . 8. L : ℕ List
. . . . | | . | . 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . . | | . | . 10. 0<||L||
. . . . | | . | . 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . . | | . | . 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . . | | . | . 13. ∀L:ℕ List.
. . . . | | . | .     sum(L[i] | i < ||L||) = d-1
. . . . | | . | .     ⇒
. . . . | | . | .     0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k)
. . . . | | . | . 14. i : ℕ||L||
. . . . | | . | . 15. ∀d:ℤ.
. . . . | | . | .     sum(L[x]-L[i--][x] | x < ||L||) = d
. . . . | | . | .     ⇒
. . . . | | . | .     sum(L[x] | x < ||L||)
. . . . | | . | .     =
. . . . | | . | .     sum(L[i--][x] | x < ||L||)+d
. . . . | | . | . 16. sum(L[x]-L[i--][x] | x < ||L||) = L[i]-L[i--][i]
. . . . | | . | . ⊢  L[i]-L[i--][i] = 1
. . . . | | . | .   by ((RWO
. . . . | | . | .        Thm* ∀L:ℕ List, i,j:ℕ||L||.
. . . . | | . | .              0<L[i]
. . . . | | . | .              ⇒
. . . . | | . | .              L[i--][j] = if j=2i→ L[j]-1 else L[j] fi
. . . . | | . | .        {list_DASH_dec_DASH_select}
. . . . | | . | .        0)
. . . . | | . | .       THENA
. . . . | | . | .       (Auto THEN (AutoInst [i])))
. . . . | | . | .      THEN
. . . . | | . | .      SplitOnConclITE
. . . . | | . |
. . . . | | . .\
. . . . | | . . 1. k : ℤ
. . . . | | . . 2. 0<k
. . . . | | . . 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . . | | . . 4. ¬k = 1
. . . . | | . . 5. 0<k
. . . . | | . . 6. d : ℕ
. . . . | | . . 7. ∀d1:ℕ.
. . . . | | . . |  d1<d
. . . . | | . . |  ⇒
```

```
. . . . | | . . |  (∀L:ℕ List.
. . . . | | . . |   sum(L[i] | i < ||L||) = d1
. . . . | | . . |   ⇒
. . . . | | . . |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . . . | | . . 8. L : ℕ List
. . . . | | . . 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . . | | . . 10. 0<||L||
. . . . | | . . 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . . | | . . 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . . | | . . 13. ∀L:ℕ List.
. . . . | | . . |   sum(L[i] | i < ||L||) = d-1
. . . . | | . . |   ⇒
. . . . | | . . |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k)
. . . . | | . . 14. i : ℕ||L||
. . . . | | . . 15. ∀d:ℤ.
. . . . | | . . |   sum(L[x]-L[i--][x] | x < ||L||) = d
. . . . | | . . |   ⇒
. . . . | | . . |   sum(L[x] | x < ||L||)
. . . . | | . . |   =
. . . . | | . . |   sum(L[i--][x] | x < ||L||)+d
. . . . | | . . 16. sum(L[x] | x < ||L||)
. . . . | | . . |   =
. . . . | | . . |   sum(L[i--][x] | x < ||L||)+1
. . . . | | . . ⊢  sum(L[i--][i@0] | i@0 < ||L||) = d-1
. . . . | | . . | by (RevHypSubst' 9 0) THEN (HypSubst' -1 0)
. . . . | | . . |
. . . . | | . . 1. k : ℤ
. . . . | | . . 2. 0<k
. . . . | | . . 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . . | | . . 4. ¬k = 1
. . . . | | . . 5. 0<k
. . . . | | . . 6. d : ℕ
. . . . | | . . 7. ∀d1:ℕ.
. . . . | | . .    d1<d
. . . . | | . .    ⇒
. . . . | | . .    (∀L:ℕ List.
. . . . | | . .     sum(L[i] | i < ||L||) = d1
. . . . | | . .     ⇒
. . . . | | . .     0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . . . | | . . 8. L : ℕ List
. . . . | | . . 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . . | | . . 10. 0<||L||
. . . . | | . . 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . . | | . . 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . . | | . . 13. ∀L:ℕ List.
. . . . | | . .     sum(L[i] | i < ||L||) = d-1
. . . . | | . .     ⇒
. . . . | | . .     0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k)
. . . . | | . . 14. i : ℕ||L||
. . . . | | . . 15. ∀d:ℤ.
. . . . | | . .     sum(L[x]-L[i--][x] | x < ||L||) = d
. . . . | | . .     ⇒
. . . . | | . .     sum(L[x] | x < ||L||)
. . . . | | . .     =
. . . . | | . .     sum(L[i--][x] | x < ||L||)+d
```

```
. . . . | | . . 16. sum(L[x] | x < ||L||)
. . . . | | . .       =
. . . . | | . .       sum(L[i--][x] | x < ||L||)+1
. . . . | | . . ⊢  sum(L[i--][i@0] | i@0 < ||L||)
. . . . | | . .     =
. . . . | | . .     sum(L[i--][x] | x < ||L||)+1-1
. . . . | | . .    by Auto
. . . . | | . .       THEN
. . . . | | . .       (Try
. . . . | | . .        (BackThru
. . . . | | . .         Thm* ∀n:ℕ, f:(ℕn→ℤ).
. . . . | | . .                (∀x:ℕn. 0≤f(x)) ⇒ 0≤sum(f(x) | x < n)
. . . . | | . .         {non_neg_sum}))
. . . . | | . .       THEN
. . . . | | . .       (AutoInst [i])
. . . . | | . .       THEN
. . . . | | . .       (Try
. . . . | | . .        ((RWO
. . . . | | . .          Thm* ∀L:ℕ List, i:ℕ||L||.
. . . . | | . .                0<L[i] ⇒ ||L[i--]|| = ||L|| ∈ ℤ
. . . . | | . .          {list_DASH_dec_DASH_length}
. . . . | | . .          0)
. . . . | | . .         THEN
. . . . | | . .         (AutoInst [i])))
. . . . | |
. . . . | .\
. . . . | . .....antecedent .....
. . . . | . 1. k : ℤ
. . . . | . 2. 0<k
. . . . | . 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . . | . 4. ¬k = 1
. . . . | . 5. 0<k
. . . . | . 6. d : ℕ
. . . . | . 7. ∀d1:ℕ.
. . . . | .    d1<d
. . . . | .    ⇒
. . . . | .    (∀L:ℕ List.
. . . . | .     sum(L[i] | i < ||L||) = d1
. . . . | .     ⇒
. . . . | .     0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . . . | . 8. L : ℕ List
. . . . | . 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . . | . 10. 0<||L||
. . . . | . 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . . | . 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . . | . 13. ∀L:ℕ List.
. . . . | .     sum(L[i] | i < ||L||) = d-1
. . . . | .     ⇒
. . . . | .     0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k)
. . . . | . 14. i : ℕ||L||
. . . . | . ⊢  0<||L[i--]||
. . . . | .   by (RWO
. . . . | .       Thm* ∀L:ℕ List, i:ℕ||L||.
. . . . | .            0<L[i] ⇒ ||L[i--]|| = ||L|| ∈ ℤ
. . . . | .       {list_DASH_dec_DASH_length}
```

```
. . . . | .       0)
. . . . | .      THEN
. . . . | .      (AutoInst [i])
. . . . |
. . . . .\
. . . . . 1. k : ℤ
. . . . . 2. 0<k
. . . . . 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . . . 4. ¬k = 1
. . . . . 5. 0<k
. . . . . 6. d : ℕ
. . . . . 7. ∀d1:ℕ.
. . . . . |  d1<d
. . . . . |  ⇒
. . . . . |  (∀L:ℕ List.
. . . . . |   sum(L[i] | i < ||L||) = d1
. . . . . |   ⇒
. . . . . |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . . . . 8. L : ℕ List
. . . . . 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . . . 10. 0<||L||
. . . . . 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . . . 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . . . 13. ∀L:ℕ List.
. . . . . |   sum(L[i] | i < ||L||) = d-1
. . . . . |   ⇒
. . . . . |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k)
. . . . . 14. ∀i:ℕ||L||. ∃r:ℕ+. r->L[i--]^k
. . . . . ⊢  ∃r:ℕ+. r->L^k
. . . . . | by Assert
. . . . . |    (∃R:ℕ List.
. . . . . |     ||R|| = ||L||
. . . . . |     & (∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k))
. . . . . |
. . . . . |\
. . . . . | .....assertion .....
. . . . . | 1. k : ℤ
. . . . . | 2. 0<k
. . . . . | 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . . . | 4. ¬k = 1
. . . . . | 5. 0<k
. . . . . | 6. d : ℕ
. . . . . | 7. ∀d1:ℕ.
. . . . . | |  d1<d
. . . . . | |  ⇒
. . . . . | |  (∀L:ℕ List.
. . . . . | |   sum(L[i] | i < ||L||) = d1
. . . . . | |   ⇒
. . . . . | |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . . . . | 8. L : ℕ List
. . . . . | 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . . . | 10. 0<||L||
. . . . . | 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . . . | 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . . . | 13. ∀L:ℕ List.
```

```
. . . . . | |   sum(L[i] | i < ||L||) = d-1
. . . . . | |   ⇒
. . . . . | |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k)
. . . . . | 14. ∀i:ℕ||L||. ∃r:ℕ+. r->L[i--]^k
. . . . . | ⊢  ∃R:ℕ List.
. . . . . | |  ||R|| = ||L|| & (∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k)
. . . . . | | by (RenameVar ‘f’ -1)
. . . . . | |    THEN
. . . . . | |    (Unfolds [‘all‘;‘exists‘] -1)
. . . . . | |
. . . . . | 1. k : ℤ
. . . . . | 2. 0<k
. . . . . | 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . . . | 4. ¬k = 1
. . . . . | 5. 0<k
. . . . . | 6. d : ℕ
. . . . . | 7. ∀d1:ℕ.
. . . . . | |  d1<d
. . . . . | |  ⇒
. . . . . | |  (∀L:ℕ List.
. . . . . | |   sum(L[i] | i < ||L||) = d1
. . . . . | |   ⇒
. . . . . | |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . . . . | 8. L : ℕ List
. . . . . | 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . . . | 10. 0<||L||
. . . . . | 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . . . | 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . . . | 13. ∀L:ℕ List.
. . . . . | |   sum(L[i] | i < ||L||) = d-1
. . . . . | |   ⇒
. . . . . | |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k)
. . . . . | 14. i:ℕ||L||→r:ℕ+×r->L[i--]^k
. . . . . | ⊢  ∃R:ℕ List.
. . . . . | |  ||R|| = ||L|| & (∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k)
. . . . . | | by InstConcl [mklist(||L||;λi.1of(f(i)))]
. . . . . | |
. . . . . | |\
. . . . . | | .....wf .....
. . . . . | | 1. k : ℤ
. . . . . | | 2. 0<k
. . . . . | | 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . . . | | 4. ¬k = 1
. . . . . | | 5. 0<k
. . . . . | | 6. d : ℕ
. . . . . | | 7. ∀d1:ℕ.
. . . . . | |    d1<d
. . . . . | |    ⇒
. . . . . | |    (∀L:ℕ List.
. . . . . | |     sum(L[i] | i < ||L||) = d1
. . . . . | |     ⇒
. . . . . | |     0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . . . . | | 8. L : ℕ List
. . . . . | | 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . . . | | 10. 0<||L||
```

```
. . . . . | | 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . . . | | 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . . . | | 13. ∀L:ℕ List.
. . . . . | |     sum(L[i] | i < ||L||) = d-1
. . . . . | |     ⇒
. . . . . | |     0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k)
. . . . . | | 14. f : i:ℕ||L||→r:ℕ+×r->L[i--]^k
. . . . . | | ⊢  mklist(||L||;λi.1of(f(i))) ∈ ℕ List
. . . . . | |   by Auto THEN (AutoInst [i])
. . . . . | |
. . . . . | |\
. . . . . | | 1. k : ℤ
. . . . . | | 2. 0<k
. . . . . | | 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . . . | | 4. ¬k = 1
. . . . . | | 5. 0<k
. . . . . | | 6. d : ℕ
. . . . . | | 7. ∀d1:ℕ.
. . . . . | | |  d1<d
. . . . . | | |  ⇒
. . . . . | | |  (∀L:ℕ List.
. . . . . | | |   sum(L[i] | i < ||L||) = d1
. . . . . | | |   ⇒
. . . . . | | |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . . . . | | 8. L : ℕ List
. . . . . | | 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . . . | | 10. 0<||L||
. . . . . | | 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . . . | | 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . . . | | 13. ∀L:ℕ List.
. . . . . | | |   sum(L[i] | i < ||L||) = d-1
. . . . . | | |   ⇒
. . . . . | | |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k)
. . . . . | | 14. f : i:ℕ||L||→r:ℕ+×r->L[i--]^k
. . . . . | | ⊢  ||mklist(||L||;λi.1of(f(i)))|| = ||L||
. . . . . | | |  & (∀i:ℕ||L||.
. . . . . | | |     0<L[i] ⇒ mklist(||L||;λi.1of(f(i)))[i]->L[i--]^k)
. . . . . | | | by ((RWO
. . . . . | | |      Thm* ∀n:ℕ, f:(ℕn→T). ||mklist(n;f)|| = n ∈ ℤ
. . . . . | | |      {mklist_length}
. . . . . | | |      0)
. . . . . | | |     THEN
. . . . . | | |     (RWO
. . . . . | | |      Thm* ∀n:ℕ, f:(ℕn→T), i:ℕn. mklist(n;f)[i] = f(i)
. . . . . | | |      {mklist_select}
. . . . . | | |      0))
. . . . . | | |    THEN
. . . . . | | |    (AutoInst [i1])
. . . . . | | |
. . . . . | | |\
. . . . . | | | 1. k : ℤ
. . . . . | | | 2. 0<k
. . . . . | | | 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . . . | | | 4. ¬k = 1
. . . . . | | | 5. 0<k
```

```
. . . . . | | | 6. d : ℕ
. . . . . | | | 7. ∀d1:ℕ.
. . . . . | | |    d1<d
. . . . . | | |    ⇒
. . . . . | | |    (∀L:ℕ List.
. . . . . | | |     sum(L[i] | i < ||L||) = d1
. . . . . | | |     ⇒
. . . . . | | |     0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . . . . | | | 8. L : ℕ List
. . . . . | | | 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . . . | | | 10. 0<||L||
. . . . . | | | 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . . . | | | 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . . . | | | 13. ∀L:ℕ List.
. . . . . | | |     sum(L[i] | i < ||L||) = d-1
. . . . . | | |     ⇒
. . . . . | | |     0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k)
. . . . . | | | 14. i:ℕ||L||→r:ℕ+×r->L[i--]^k
. . . . . | | | 15. i : ℕ||L||
. . . . . | | | 16. ℕ+
. . . . . | | | ⊢  0<L[i]  by AutoInst [i]
. . . . . | | |
. . . . . | | .\
. . . . . | | . 1. k : ℤ
. . . . . | | . 2. 0<k
. . . . . | | . 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . . . | | . 4. ¬k = 1
. . . . . | | . 5. 0<k
. . . . . | | . 6. d : ℕ
. . . . . | | . 7. ∀d1:ℕ.
. . . . . | | . |  d1<d
. . . . . | | . |  ⇒
. . . . . | | . |  (∀L:ℕ List.
. . . . . | | . |   sum(L[i] | i < ||L||) = d1
. . . . . | | . |   ⇒
. . . . . | | . |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . . . . | | . 8. L : ℕ List
. . . . . | | . 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . . . | | . 10. 0<||L||
. . . . . | | . 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . . . | | . 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . . . | | . 13. ∀L:ℕ List.
. . . . . | | . |   sum(L[i] | i < ||L||) = d-1
. . . . . | | . |   ⇒
. . . . . | | . |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k)
. . . . . | | . 14. f : i:ℕ||L||→r:ℕ+×r->L[i--]^k
. . . . . | | . ⊢  ||L|| = ||L||
. . . . . | | . |  & (∀i:ℕ||L||.
. . . . . | | . |      0<L[i] ⇒ (λi.1of(f(i)))(i)->L[i--]^k)
. . . . . | | . | by Reduce 0
. . . . . | | . |
. . . . . | | . 1. k : ℤ
. . . . . | | . 2. 0<k
. . . . . | | . 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . . . | | . 4. ¬k = 1
```

```
. . . . . | | . 5. 0<k
. . . . . | | . 6. d : ℕ
. . . . . | | . 7. ∀d1:ℕ.
. . . . . | | .    d1<d
. . . . . | | .    ⇒
. . . . . | | .    (∀L:ℕ List.
. . . . . | | .     sum(L[i] | i < ||L||) = d1
. . . . . | | .     ⇒
. . . . . | | .     0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . . . . | | . 8. L : ℕ List
. . . . . | | . 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . . . | | . 10. 0<||L||
. . . . . | | . 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . . . | | . 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . . . | | . 13. ∀L:ℕ List.
. . . . . | | .     sum(L[i] | i < ||L||) = d-1
. . . . . | | .     ⇒
. . . . . | | .     0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k)
. . . . . | | . 14. f : i:ℕ||L||→r:ℕ+×r->L[i--]^k
. . . . . | | . 15. i : ℕ||L||
. . . . . | | . 16. 0<L[i]
. . . . . | | . ⊢  1of(f(i))->L[i--]^k
. . . . . | | .   by (GenConclAtAddr [1;1]) THEN (Analyze -2)
. . . . . | | .      THEN
. . . . . | | .      (Reduce 0)
. . . . . | |
. . . . . | .\
. . . . . | . .....wf .....
. . . . . | . 1. k : ℤ
. . . . . | . 2. 0<k
. . . . . | . 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . . . | . 4. ¬k = 1
. . . . . | . 5. 0<k
. . . . . | . 6. d : ℕ
. . . . . | . 7. ∀d1:ℕ.
. . . . . | .    d1<d
. . . . . | .    ⇒
. . . . . | .    (∀L:ℕ List.
. . . . . | .     sum(L[i] | i < ||L||) = d1
. . . . . | .     ⇒
. . . . . | .     0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . . . . | . 8. L : ℕ List
. . . . . | . 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . . . | . 10. 0<||L||
. . . . . | . 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . . . | . 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . . . | . 13. ∀L:ℕ List.
. . . . . | .     sum(L[i] | i < ||L||) = d-1
. . . . . | .     ⇒
. . . . . | .     0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k)
. . . . . | . 14. i:ℕ||L||→r:ℕ+×r->L[i--]^k
. . . . . | . 15. R : ℕ List
. . . . . | . ⊢  (||R|| = ||L||
. . . . . | .     & (∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k))
. . . . . | .    ∈ Prop  by Auto
```

```
. . . . . . |
. . . . . . .\
. . . . . . . 1. k : ℤ
. . . . . . . 2. 0<k
. . . . . . . 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . . . . . 4. ¬k = 1
. . . . . . . 5. 0<k
. . . . . . . 6. d : ℕ
. . . . . . . 7. ∀d1:ℕ.
. . . . . . . |  d1<d
. . . . . . . |  ⇒
. . . . . . . |  (∀L:ℕ List.
. . . . . . . |   sum(L[i] | i < ||L||) = d1
. . . . . . . |   ⇒
. . . . . . . |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . . . . . . 8. L : ℕ List
. . . . . . . 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . . . . . 10. 0<||L||
. . . . . . . 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . . . . . 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . . . . . 13. ∀L:ℕ List.
. . . . . . . |   sum(L[i] | i < ||L||) = d-1
. . . . . . . |   ⇒
. . . . . . . |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k)
. . . . . . . 14. ∀i:ℕ||L||. ∃r:ℕ+. r->L[i--]^k
. . . . . . . 15. ∃R:ℕ List.
. . . . . . . |   ||R|| = ||L|| & (∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k)
. . . . . . . ⊢  ∃r:ℕ+. r->L^k
. . . . . . . | by ExRepD THEN (InstHyp [R] 3) THEN ExRepD
. . . . . . . |
. . . . . . . 1. k : ℤ
. . . . . . . 2. 0<k
. . . . . . . 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . . . . . 4. ¬k = 1
. . . . . . . 5. 0<k
. . . . . . . 6. d : ℕ
. . . . . . . 7. ∀d1:ℕ.
. . . . . . . |  d1<d
. . . . . . . |  ⇒
. . . . . . . |  (∀L:ℕ List.
. . . . . . . |   sum(L[i] | i < ||L||) = d1
. . . . . . . |   ⇒
. . . . . . . |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . . . . . . 8. L : ℕ List
. . . . . . . 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . . . . . 10. 0<||L||
. . . . . . . 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . . . . . 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . . . . . 13. ∀L:ℕ List.
. . . . . . . |   sum(L[i] | i < ||L||) = d-1
. . . . . . . |   ⇒
. . . . . . . |   0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k)
. . . . . . . 14. ∀i:ℕ||L||. ∃r:ℕ+. r->L[i--]^k
. . . . . . . 15. R : ℕ List
. . . . . . . 16. ||R|| = ||L||
```

```
. . . . . . . 17. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. . . . . . . 18. r : ℕ+

. . . . . . . 19. r->R^k-1
. . . . . . . ⊢  ∃r:ℕ+. r->L^k
. . . . . . . | by Inst Thm: Ramsey_DASH_recursion [r;k;L;R]
. . . . . . . |
. . . . . . . 1. k : ℤ
. . . . . . . 2. 0<k
. . . . . . . 3. 0<k-1 ⇒ (∀L:ℕ List. 0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k-1))
. . . . . . . 4. ¬k = 1
. . . . . . . 5. 0<k
. . . . . . . 6. d : ℕ
. . . . . . . 7. ∀d1:ℕ.
. . . . . . .    d1<d
. . . . . . .    ⇒
. . . . . . .    (∀L:ℕ List.
. . . . . . .     sum(L[i] | i < ||L||) = d1
. . . . . . .     ⇒
. . . . . . .     0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k))
. . . . . . . 8. L : ℕ List
. . . . . . . 9. sum(L[i] | i < ||L||) = d
. . . . . . . 10. 0<||L||
. . . . . . . 11. ¬(∃i:ℕ||L||. L[i]<k)
. . . . . . . 12. ∀i:ℕ||L||. 2≤L[i]
. . . . . . . 13. ∀L:ℕ List.
. . . . . . .     sum(L[i] | i < ||L||) = d-1
. . . . . . .     ⇒
. . . . . . .     0<||L|| ⇒ (∃r:ℕ+. r->L^k)
. . . . . . . 14. ∀i:ℕ||L||. ∃r:ℕ+. r->L[i--]^k
. . . . . . . 15. R : ℕ List
. . . . . . . 16. ||R|| = ||L||
. . . . . . . 17. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. . . . . . . 18. r : ℕ+
. . . . . . . 19. r->R^k-1
. . . . . . . 20. r+1->L^k
. . . . . . . ⊢  ∃r:ℕ+. r->L^k  by InstConcl [r+1]
END
```