Ramsey-recursion THM

```
⊢  ∀r,k:ℕ, L,R:ℕ List.
|  2≤k
|  ⇒
|  ||R|| = ||L||
|  ⇒
|  (∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k) ⇒ r->R^k-1 ⇒ r+1->L^k
| by Auto THEN (Analyze 0)
|
1. r : ℕ
2. k : ℕ
3. L : ℕ List
4. R : ℕ List
5. 2≤k
6. ||R|| = ||L||
7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
8. r->R^k-1
9. n : ℕ
10. r+1≤n
11. G :
|   {s:(ℕn List)| ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }→
|   ℕ||L||
⊢  ∃c:ℕ||L||, f:(ℕL[c]→ℕn).
|  increasing(f;L[c])
|  & (∀s:ℕL[c] List.
|     ||s|| = k ⇒ (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s)) = c)
| by (Unfold ‘arrows‘ -4) THEN (InstHyp [n-1;λ₂s. G(s @ [(n-1)])] -4)
|    THEN
|    (Fold ‘arrows‘ -5)
|
|\
| 1. r : ℕ
| 2. k : ℕ
| 3. L : ℕ List
| 4. R : ℕ List
| 5. 2≤k
| 6. ||R|| = ||L||
| 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
| 8. r->R^k-1
| 9. n : ℕ
| 10. r+1≤n
| 11. {s:(ℕn List)| ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }→
| |   ℕ||L||
| 12. s :
| |   {s:(ℕ(n-1) List)
| |    | ||s|| = k-1 & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
| ⊢  (s @ [(n-1)])
| |  ∈ {s:(ℕn List)| ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
| | by (Analyze -1) THEN Analyze THEN (Try (Complete Auto))
| |
| .....set predicate .....
| 1. r : ℕ
| 2. k : ℕ
| 3. L : ℕ List
```

```
| 4. R : ℕ List
| 5. 2≤k
| 6. ||R|| = ||L||
| 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
| 8. r->R^k-1
| 9. n : ℕ
| 10. r+1≤n
| 11. {s:(ℕn List)| ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }→
| |   ℕ||L||
| 12. s : ℕ(n-1) List
| 13. ||s|| = k-1 & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
| ⊢  ||s @ [(n-1)]|| = k
| |  & (∀x,y:ℕ||s @ [(n-1)]||.
| |      x<y ⇒ (s @ [(n-1)])[x]<(s @ [(n-1)])[y])
| | by (RWO
| |      Thm* ∀as,bs:T List. ||as @ bs|| = ||as||+||bs|| ∈ ℤ
| |      {length_append}
| |      0)
| |     THEN
| |     (Reduce 0)
| |
| 1. r : ℕ
| 2. k : ℕ
| 3. L : ℕ List
| 4. R : ℕ List
| 5. 2≤k
| 6. ||R|| = ||L||
| 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
| 8. r->R^k-1
| 9. n : ℕ
| 10. r+1≤n
| 11. {s:(ℕn List)| ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }→
| |   ℕ||L||
| 12. s : ℕ(n-1) List
| 13. ||s|| = k-1
| 14. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
| 15. x : ℕ(||s||+1)
| 16. y : ℕ(||s||+1)
| 17. x<y
| ⊢  (s @ [(n-1)])[x]<(s @ [(n-1)])[y]  by Decide (y = ||s||)
| |
| |\
| | 1. r : ℕ
| | 2. k : ℕ
| | 3. L : ℕ List
| | 4. R : ℕ List
| | 5. 2≤k
| | 6. ||R|| = ||L||
| | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
| | 8. r->R^k-1
| | 9. n : ℕ
| | 10. r+1≤n
| | 11. {s:(ℕn List)| ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }→
| | |   ℕ||L||
| | 12. s : ℕ(n-1) List
```

```
| | 13. ||s|| = k-1
| | 14. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
| | 15. x : ℕ(||s||+1)
| | 16. y : ℕ(||s||+1)
| | 17. x<y
| | 18. y = ||s||
| | ⊢  (s @ [(n-1)])[x]<(s @ [(n-1)])[y]
| | | by (RW
| | |     (AddrC [2]
| | |      (LemmaC
| | |       Thm* ∀as,bs:T List, i:{||as||..(||as||+||bs||)⁻}.
| | |             (as @ bs)[i] = bs[(i-||as||)]
| | |       {select_append_back}))
| | |     0)
| | |    THEN
| | |    (RWO
| | |     Thm* ∀as,bs:T List, i:ℕ||as||. (as @ bs)[i] = as[i]
| | |     {select_append_front}
| | |     0)
| | |
| | 1. r : ℕ
| | 2. k : ℕ
| | 3. L : ℕ List
| | 4. R : ℕ List
| | 5. 2≤k
| | 6. ||R|| = ||L||
| | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
| | 8. r->R^k-1
| | 9. n : ℕ
| | 10. r+1≤n
| | 11. {s:(ℕn List)| ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }→
| |     ℕ||L||
| | 12. s : ℕ(n-1) List
| | 13. ||s|| = k-1
| | 14. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
| | 15. x : ℕ(||s||+1)
| | 16. y : ℕ(||s||+1)
| | 17. x<y
| | 18. y = ||s||
| | ⊢  s[x]<[(n-1)][(y-||s||)]
| |   by (Subst' (y-||s|| = 0) 0) THEN (Reduce 0)
| |
| .\
| . 1. r : ℕ
| . 2. k : ℕ
| . 3. L : ℕ List
| . 4. R : ℕ List
| . 5. 2≤k
| . 6. ||R|| = ||L||
| . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
| . 8. r->R^k-1
| . 9. n : ℕ
| . 10. r+1≤n
| . 11. {s:(ℕn List)| ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }→
| .     ℕ||L||
```

```
| . 12. s : ℕ(n-1) List
| . 13. ||s|| = k-1
| . 14. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
| . 15. x : ℕ(||s||+1)
| . 16. y : ℕ(||s||+1)
| . 17. x<y
| . 18. ¬y = ||s||
| . ⊢  (s @ [(n-1)])[x]<(s @ [(n-1)])[y]
| .   by (RWO
| .       Thm* ∀as,bs:T List, i:ℕ||as||. (as @ bs)[i] = as[i]
| .       {select_append_front}
| .       0)
| .      THEN
| .      EasyHyp'
|
.\
. 1. r : ℕ
. 2. k : ℕ
. 3. L : ℕ List
. 4. R : ℕ List
. 5. 2≤k
. 6. ||R|| = ||L||
. 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. 8. r->R^k-1
. 9. n : ℕ
. 10. r+1≤n
. 11. G :
. |   {s:(ℕn List)| ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }→
. |   ℕ||L||
. 12. ∃c:ℕ||R||, f:(ℕR[c]→ℕ(n-1)).
. |   increasing(f;R[c])
. |   & (∀s:ℕR[c] List.
. |      ||s|| = k-1
. |      ⇒
. |      (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c)
. ⊢  ∃c:ℕ||L||, f:(ℕL[c]→ℕn).
. |  increasing(f;L[c])
. |  & (∀s:ℕL[c] List.
. |     ||s|| = k
. |     ⇒
. |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s)) = c)
. | by ExRepD THEN (Decide (0<L[c]))
. |
. |\
. | 1. r : ℕ
. | 2. k : ℕ
. | 3. L : ℕ List
. | 4. R : ℕ List
. | 5. 2≤k
. | 6. ||R|| = ||L||
. | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | 8. r->R^k-1
. | 9. n : ℕ
. | 10. r+1≤n
. | 11. G :
```

```
. | |   {s:(ℕn List)| ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }→
. | |   ℕ||L||
. | 12. c : ℕ||R||
. | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | 14. increasing(f;R[c])
. | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | |   ||s|| = k-1
. | |   ⇒
. | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | 16. 0<L[c]
. | ⊢  ∃c:ℕ||L||, f:(ℕL[c]→ℕn).
. | |  increasing(f;L[c])
. | |  & (∀s:ℕL[c] List.
. | |     ||s|| = k
. | |     ⇒
. | |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s)) = c)
. | | by InstHyp [c] 7
. | |
. | 1. r : ℕ
. | 2. k : ℕ
. | 3. L : ℕ List
. | 4. R : ℕ List
. | 5. 2≤k
. | 6. ||R|| = ||L||
. | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | 8. r->R^k-1
. | 9. n : ℕ
. | 10. r+1≤n
. | 11. G :
. | |   {s:(ℕn List)| ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }→
. | |   ℕ||L||
. | 12. c : ℕ||R||
. | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | 14. increasing(f;R[c])
. | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | |   ||s|| = k-1
. | |   ⇒
. | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | 16. 0<L[c]
. | 17. R[c]->L[c--]^k
. | ⊢  ∃c:ℕ||L||, f:(ℕL[c]→ℕn).
. | |  increasing(f;L[c])
. | |  & (∀s:ℕL[c] List.
. | |     ||s|| = k
. | |     ⇒
. | |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s)) = c)
. | | by (Unfold `arrows` -1) THEN (InstHyp [R[c]] -1)
. | |    THEN
. | |    (Fold `arrows` -2)
. | |    THEN
. | |    (Assert
. | |     ((λ₂s. G(map(f;s)))
. | |      ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | |         | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | |        →ℕ||L[c--]||))
```

```
. | |
. | |\
. | | .....assertion .....
. | | 1. r : ℕ
. | | 2. k : ℕ
. | | 3. L : ℕ List
. | | 4. R : ℕ List
. | | 5. 2≤k
. | | 6. ||R|| = ||L||
. | | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | | 8. r->R^k-1
. | | 9. n : ℕ
. | | 10. r+1≤n
. | | 11. G :
. | | |   {s:(ℕn List)| ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | | |   →ℕ||L||
. | | 12. c : ℕ||R||
. | | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | | 14. increasing(f;R[c])
. | | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | | |   ||s|| = k-1
. | | |   ⇒
. | | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | | 16. 0<L[c]
. | | 17. R[c]->L[c--]^k
. | | 18. ∀G:({s:(ℕR[c] List)
. | | |        | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | | |       →ℕ||L[c--]||).
. | | |
. | | |   ∃c@0:ℕ||L[c--]||, f:(ℕL[c--][c@0]→ℕR[c]).
. | | |   increasing(f;L[c--][c@0])
. | | |   & (∀s:ℕL[c--][c@0] List.
. | | |      ||s|| = k
. | | |      ⇒
. | | |      (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s)) = c@0)
. | | ⊢  (λ2s. G(map(f;s)))
. | | |  ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | | |     | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | | |    →ℕ||L[c--]||
. | | | by Analyze THEN (Analyze -1) THEN (Analyze -1)
. | | |    THEN
. | | |    (Subst' (||L[c--]|| = ||L||) 0)
. | | |    THEN
. | | |    (Try
. | | |     (RWO
. | | |      Thm* ∀L:ℕ List, i:ℕ||L||.
. | | |           0<L[i] ⇒ ||L[i--]|| = ||L|| ∈ ℤ
. | | |      {list_DASH_dec_DASH_length}
. | | |      0))
. | | |
. | | 1. r : ℕ
. | | 2. k : ℕ
. | | 3. L : ℕ List
. | | 4. R : ℕ List
. | | 5. 2≤k
```

```
. | | 6. ||R|| = ||L||
. | | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | | 8. r->R^k-1
. | | 9. n : ℕ
. | | 10. r+1≤n
. | | 11. G :
. | |     {s:(ℕn List)| ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | |     →ℕ||L||
. | | 12. c : ℕ||R||
. | | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | | 14. increasing(f;R[c])
. | | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | |     ||s|| = k-1
. | |     ⇒
. | |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | | 16. 0<L[c]
. | | 17. R[c]->L[c--]^k
. | | 18. ∀G:({s:(ℕR[c] List)
. | |          | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | |         →ℕ||L[c--]||).
. | |
. | |     ∃c@0:ℕ||L[c--]||, f:(ℕL[c--][c@0]→ℕR[c]).
. | |     increasing(f;L[c--][c@0])
. | |     & (∀s:ℕL[c--][c@0] List.
. | |        ||s|| = k
. | |        ⇒
. | |        (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s)) = c@0)
. | | 19. s : ℕR[c] List
. | | 20. ||s|| = k
. | | 21. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | | ⊢  G(map(f;s)) ∈ ℕ||L||
. | |   by ((Auto THEN Analyze THEN (Try (Complete Auto))
. | |        THEN
. | |        (RWO
. | |         Thm* ∀f:(A→B), as:A List. ||map(f;as)|| = ||as|| ∈ ℤ
. | |         {map_length}
. | |         0))
. | |       THEN
. | |       (RWO
. | |        Thm* ∀f:(A→B), as:A List, n:ℕ||as||.
. | |             map(f;as)[n] = f(as[n])
. | |        {map_select}
. | |        0))
. | |      THEN
. | |      (AllHyps
. | |       (λh.
. | |        ((FwdThru
. | |          Thm* ∀k:ℕ, f:(ℕk→ℤ).
. | |               increasing(f;k) ⇒ (∀x,y:ℕk. x<y ⇒ f(x)<f(y))
. | |          {increasing_implies}
. | |          [h])
. | |         THEN
. | |         (BackThru -1))
. | |        THEN
. | |        EasyHyp))
```

```
. | |
. | .\
. | . 1. r : ℕ
. | . 2. k : ℕ
. | . 3. L : ℕ List
. | . 4. R : ℕ List
. | . 5. 2≤k
. | . 6. ||R|| = ||L||
. | . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . 8. r->R^k-1
. | . 9. n : ℕ
. | . 10. r+1≤n
. | . 11. G :
. | . |   {s:(ℕn List)| ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . |   →ℕ||L||
. | . 12. c : ℕ||R||
. | . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . 14. increasing(f;R[c])
. | . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . |   ||s|| = k-1
. | . |   ⇒
. | . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . 16. 0<L[c]
. | . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . 18. ∀G:({s:(ℕR[c] List)
. | . |         | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . |        →ℕ||L[c--]||).
. | . |
. | . |   ∃c@0:ℕ||L[c--]||, f:(ℕL[c--][c@0]→ℕR[c]).
. | . |   increasing(f;L[c--][c@0])
. | . |   & (∀s:ℕL[c--][c@0] List.
. | . |      ||s|| = k
. | . |      ⇒
. | . |      (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s)) = c@0)
. | . 19. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . |      | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . |     →ℕ||L[c--]||
. | . ⊢  ∃c:ℕ||L||, f:(ℕL[c]→ℕn).
. | . |  increasing(f;L[c])
. | . |  & (∀s:ℕL[c] List.
. | . |     ||s|| = k
. | . |     ⇒
. | . |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s)) = c)
. | . | by (InstHyp [λ₂s. G(map(f;s))] -2) THEN (Thin -3)
. | . |
. | . 1. r : ℕ
. | . 2. k : ℕ
. | . 3. L : ℕ List
. | . 4. R : ℕ List
. | . 5. 2≤k
. | . 6. ||R|| = ||L||
. | . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . 8. r->R^k-1
. | . 9. n : ℕ
```

```
. | . 10. r+1≤n
. | . 11. G :
. | . |   {s:(ℕn List)| ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . |   →ℕ||L||
. | . 12. c : ℕ||R||
. | . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . 14. increasing(f;R[c])
. | . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . |   ||s|| = k-1
. | . |   ⇒
. | . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . 16. 0<L[c]
. | . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . |      | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . |     →ℕ||L[c--]||
. | . 19. ∃c@0:ℕ||L[c--]||, f@0:(ℕL[c--][c@0]→ℕR[c]).
. | . |   increasing(f@0;L[c--][c@0])
. | . |   & (∀s:ℕL[c--][c@0] List.
. | . |      ||s|| = k
. | . |      ⇒
. | . |      (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . |      ⇒
. | . |      G(map(f;map(f@0;s))) = c@0)
. | . ⊢  ∃c:ℕ||L||, f:(ℕL[c]→ℕn).
. | . |  increasing(f;L[c])
. | . |  & (∀s:ℕL[c] List.
. | . |     ||s|| = k
. | . |     ⇒
. | . |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s)) = c)
. | . | by (Analyze -1)
. | . |    THEN
. | . |    (AssertBY (c@0 ∈ ℕ||L||)
. | . |     ((Subst' (||L|| = ||L[c--]||) 0)
. | . |      THEN
. | . |      (RWO
. | . |       Thm* ∀L:ℕ List, i:ℕ||L||.
. | . |             0<L[i] ⇒ ||L[i--]|| = ||L|| ∈ ℤ
. | . |       {list_DASH_dec_DASH_length}
. | . |       0)))
. | . |    THEN
. | . |    (InstConcl [c@0])
. | . |
. | . |\
. | . | 1. r : ℕ
. | . | 2. k : ℕ
. | . | 3. L : ℕ List
. | . | 4. R : ℕ List
. | . | 5. 2≤k
. | . | 6. ||R|| = ||L||
. | . | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | 8. r->R^k-1
. | . | 9. n : ℕ
. | . | 10. r+1≤n
```

```
. | . | 11. G :
. | . | |   {s:(ℕn List)
. | . | |    | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | |   →ℕ||L||
. | . | 12. c : ℕ||R||
. | . | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | 14. increasing(f;R[c])
. | . | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | |   ||s|| = k-1
. | . | |   ⇒
. | . | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | |   ⇒
. | . | |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | 16. 0<L[c]
. | . | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | |      | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | |     →ℕ||L[c--]||
. | . | 19. c@0 : ℕ||L[c--]||
. | . | 20. ∃f@0:(ℕL[c--][c@0]→ℕR[c]).
. | . | |   increasing(f@0;L[c--][c@0])
. | . | |   & (∀s:ℕL[c--][c@0] List.
. | . | |      ||s|| = k
. | . | |      ⇒
. | . | |      (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | |      ⇒
. | . | |      G(map(f;map(f@0;s))) = c@0)
. | . | 21. c@0 ∈ ℕ||L||
. | . | ⊢  ∃f:(ℕL[c@0]→ℕn).
. | . | |  increasing(f;L[c@0])
. | . | |  & (∀s:ℕL[c@0] List.
. | . | |     ||s|| = k
. | . | |     ⇒
. | . | |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s)) = c@0)
. | . | | by Decide (c@0 = c)
. | . | |
. | . | |\
. | . | | | 1. r : ℕ
. | . | | | 2. k : ℕ
. | . | | | 3. L : ℕ List
. | . | | | 4. R : ℕ List
. | . | | | 5. 2≤k
. | . | | | 6. ||R|| = ||L||
. | . | | | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | | 8. r->R^k-1
. | . | | | 9. n : ℕ
. | . | | | 10. r+1≤n
. | . | | | 11. G :
. | . | | | |   {s:(ℕn List)
. | . | | | |    | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | | |   →ℕ||L||
. | . | | | 12. c : ℕ||R||
. | . | | | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | | 14. increasing(f;R[c])
```

```
. | . | | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | |   ||s|| = k-1
. | . | | |   ⇒
. | . | | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | |   ⇒
. | . | | |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | 16. 0<L[c]
. | . | | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | |      | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | 19. c@0 : ℕ||L[c--]||
. | . | | 20. ∃f@0:(ℕL[c--][c@0]→ℕR[c]).
. | . | | |   increasing(f@0;L[c--][c@0])
. | . | | |   & (∀s:ℕL[c--][c@0] List.
. | . | | |      ||s|| = k
. | . | | |      ⇒
. | . | | |      (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | |      ⇒
. | . | | |      G(map(f;map(f@0;s))) = c@0)
. | . | | 21. c@0 ∈ ℕ||L||
. | . | | 22. c@0 = c
. | . | | ⊢  ∃f:(ℕL[c@0]→ℕn).
. | . | | |  increasing(f;L[c@0])
. | . | | |  & (∀s:ℕL[c@0] List.
. | . | | |     ||s|| = k
. | . | | |     ⇒
. | . | | |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s)) = c@0)
. | . | | | by (HypSubst' -1 0) THEN (HypSubst' -1 -3)
. | . | | |    THEN
. | . | | |    (RepeatFor 2 (Thin -1))
. | . | | |
. | . | | 1. r : ℕ
. | . | | 2. k : ℕ
. | . | | 3. L : ℕ List
. | . | | 4. R : ℕ List
. | . | | 5. 2≤k
. | . | | 6. ||R|| = ||L||
. | . | | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | 8. r->R^k-1
. | . | | 9. n : ℕ
. | . | | 10. r+1≤n
. | . | | 11. G :
. | . | | |   {s:(ℕn List)
. | . | | |    | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | |   →ℕ||L||
. | . | | 12. c : ℕ||R||
. | . | | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | 14. increasing(f;R[c])
. | . | | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | |   ||s|| = k-1
. | . | | |   ⇒
. | . | | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | |   ⇒
```

```
. | . | | |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | 16. 0<L[c]
. | . | | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | |       | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | |      →ℕ||L[c--]||
. | . | | 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | 20. ∃f@0:(ℕL[c--][c]→ℕR[c]).
. | . | | |   increasing(f@0;L[c--][c])
. | . | | |   & (∀s:ℕL[c--][c] List.
. | . | | |       ||s|| = k
. | . | | |       ⇒
. | . | | |       (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | |       ⇒
. | . | | |       G(map(f;map(f@0;s))) = c)
. | . | | ⊢  ∃f:(ℕL[c]→ℕn).
. | . | | |  increasing(f;L[c])
. | . | | |  & (∀s:ℕL[c] List.
. | . | | |     ||s|| = k
. | . | | |     ⇒
. | . | | |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s)) = c)
. | . | | | by Subst' (L[c--][c] = L[c]-1) -1
. | . | | |
. | . | | |\
. | . | | | | 1. r : ℕ
. | . | | | | 2. k : ℕ
. | . | | | | 3. L : ℕ List
. | . | | | | 4. R : ℕ List
. | . | | | | 5. 2≤k
. | . | | | | 6. ||R|| = ||L||
. | . | | | | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | | | 8. r->R^k-1
. | . | | | | 9. n : ℕ
. | . | | | | 10. r+1≤n
. | . | | | | 11. G :
. | . | | | |     {s:(ℕn List)
. | . | | | |      | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | | |     →ℕ||L||
. | . | | | | 12. c : ℕ||R||
. | . | | | | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | | | 14. increasing(f;R[c])
. | . | | | | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | | |     ||s|| = k-1
. | . | | | |     ⇒
. | . | | | |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | | |     ⇒
. | . | | | |     G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | | | 16. 0<L[c]
. | . | | | | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | | | 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | | |     ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | | |         | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | | |        →ℕ||L[c--]||
. | . | | | | 19. ℕ||L[c--]||
```

```
. | . | | | 20. ∃f@0:(ℕL[c--][c]→ℕR[c]).
. | . | | |     increasing(f@0;L[c--][c])
. | . | | |     & (∀s:ℕL[c--][c] List.
. | . | | |        ||s|| = k
. | . | | |        ⇒
. | . | | |        (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | |        ⇒
. | . | | |        G(map(f;map(f@0;s))) = c)
. | . | | | ⊢  c<||L[c--]||
. | . | | |   by RWO
. | . | | |      Thm* ∀L:ℕ List, i:ℕ||L||.
. | . | | |           0<L[i] ⇒ ||L[i--]|| = ||L|| ∈ ℤ
. | . | | |      {list_DASH_dec_DASH_length}
. | . | | |      0
. | . | | |
. | . | | |\
. | . | | | 1. r : ℕ
. | . | | | 2. k : ℕ
. | . | | | 3. L : ℕ List
. | . | | | 4. R : ℕ List
. | . | | | 5. 2≤k
. | . | | | 6. ||R|| = ||L||
. | . | | | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | | 8. r->R^k-1
. | . | | | 9. n : ℕ
. | . | | | 10. r+1≤n
. | . | | | 11. G :
. | . | | |     {s:(ℕn List)
. | . | | |      | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | |     →ℕ||L||
. | . | | | 12. c : ℕ||R||
. | . | | | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | | 14. increasing(f;R[c])
. | . | | | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | |     ||s|| = k-1
. | . | | |     ⇒
. | . | | |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | |     ⇒
. | . | | |     G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | | 16. 0<L[c]
. | . | | | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | | 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | |     ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | |        | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | |       →ℕ||L[c--]||
. | . | | | 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | | 20. ∃f@0:(ℕL[c--][c]→ℕR[c]).
. | . | | |     increasing(f@0;L[c--][c])
. | . | | |     & (∀s:ℕL[c--][c] List.
. | . | | |        ||s|| = k
. | . | | |        ⇒
. | . | | |        (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | |        ⇒
. | . | | |        G(map(f;map(f@0;s))) = c)
. | . | | | ⊢  L[c--][c] = L[c]-1
```

```
. | . | | |   by (RWO
. | . | | |       Thm* ∀L:ℕ List, i,j:ℕ||L||.
. | . | | |            0<L[i]
. | . | | |            ⇒
. | . | | |            L[i--][j] = if j=₂i→ L[j]-1 else L[j] fi
. | . | | |       {list_DASH_dec_DASH_select}
. | . | | |       0)
. | . | | |      THEN
. | . | | |      SplitOnConclITE
. | . | | |
. | . | | .\
. | . | | . 1. r : ℕ
. | . | | . 2. k : ℕ
. | . | | . 3. L : ℕ List
. | . | | . 4. R : ℕ List
. | . | | . 5. 2≤k
. | . | | . 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . 8. r->R^k-1
. | . | | . 9. n : ℕ
. | . | | . 10. r+1≤n
. | . | | . 11. G :
. | . | | . |   {s:(ℕn List)
. | . | | . |    | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . |   →ℕ||L||
. | . | | . 12. c : ℕ||R||
. | . | | . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . |   ||s|| = k-1
. | . | | . |   ⇒
. | . | | . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . |   ⇒
. | . | | . |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . 16. 0<L[c]
. | . | | . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | | . |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . |      | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . 20. ∃f@0:(ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]).
. | . | | . |   increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . |   & (∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . |      ||s|| = k
. | . | | . |      ⇒
. | . | | . |      (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . |      ⇒
. | . | | . |      G(map(f;map(f@0;s))) = c)
. | . | | . ⊢  ∃f:(ℕL[c]→ℕn).
. | . | | . |  increasing(f;L[c])
. | . | | . |  & (∀s:ℕL[c] List.
. | . | | . |     ||s|| = k
. | . | | . |     ⇒
. | . | | . |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s)) = c)
```

```
. | . | | . | by ExRepD THEN (InstConcl [f o f@0[L[c]-1:=n-1]])
. | . | | . |
. | . | | . |\
. | . | | . | .....wf .....
. | . | | . | 1. r : ℕ
. | . | | . | 2. k : ℕ
. | . | | . | 3. L : ℕ List
. | . | | . | 4. R : ℕ List
. | . | | . | 5. 2≤k
. | . | | . | 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | 8. r->R^k-1
. | . | | . | 9. n : ℕ
. | . | | . | 10. r+1≤n
. | . | | . | 11. G :
. | . | | . | |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | |    | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | |   →ℕ||L||
. | . | | . | 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | |   ||s|| = k-1
. | . | | . | |   ⇒
. | . | | . | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | |   ⇒
. | . | | . | |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | 16. 0<L[c]
. | . | | . | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | . | |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | |      | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | |   ||s|| = k
. | . | | . | |   ⇒
. | . | | . | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | |   ⇒
. | . | | . | |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | ⊢  f o f@0[L[c]-1:=n-1] ∈ ℕL[c]→ℕn
. | . | | . | | by Assert (f o f@0[L[c]-1:=n-1] ∈ ℕ(L[c]-1+1)→ℕn)
. | . | | . | |
. | . | | . | |\
. | . | | . | | | .....assertion .....
. | . | | . | | | 1. r : ℕ
. | . | | . | | | 2. k : ℕ
. | . | | . | | | 3. L : ℕ List
. | . | | . | | | 4. R : ℕ List
. | . | | . | | | 5. 2≤k
. | . | | . | | | 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | | | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | | | 8. r->R^k-1
```

```
. | . | | . | | 9. n : ℕ
. | . | | . | | 10. r+1≤n
. | . | | . | | 11. G :
. | . | | . | |     {s:(ℕn List)
. | . | | . | |      | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | |     →ℕ||L||
. | . | | . | | 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | | 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | |     ||s|| = k-1
. | . | | . | |     ⇒
. | . | | . | |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | |     ⇒
. | . | | . | |     G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | | 16. 0<L[c]
. | . | | . | | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | | 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | | . | |     ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | |        | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | |       →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | | 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | | 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | | 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | | 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | |     ||s|| = k
. | . | | . | |     ⇒
. | . | | . | |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | |     ⇒
. | . | | . | |     G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | | ⊢  f o f@0[L[c]-1:=n-1] ∈ ℕ(L[c]-1+1)→ℕn  by Auto
. | . | | . | |
. | . | | . | .\
. | . | | . | . 1. r : ℕ
. | . | | . | . 2. k : ℕ
. | . | | . | . 3. L : ℕ List
. | . | | . | . 4. R : ℕ List
. | . | | . | . 5. 2≤k
. | . | | . | . 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . 8. r->R^k-1
. | . | | . | . 9. n : ℕ
. | . | | . | . 10. r+1≤n
. | . | | . | . 11. G :
. | . | | . | .     {s:(ℕn List)
. | . | | . | .      | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | .     →ℕ||L||
. | . | | . | . 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | .     ||s|| = k-1
. | . | | . | .     ⇒
. | . | | . | .     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | .     ⇒
```

```
. | . | | . | .     G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . 16. 0<L[c]
. | . | | . | . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | | . | .     ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | .        | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | .       →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | .     ||s|| = k
. | . | | . | .     ⇒
. | . | | . | .     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | .     ⇒
. | . | | . | .     G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . 23. f o f@0[L[c]-1:=n-1] ∈ ℕ(L[c]-1+1)→ℕn
. | . | | . | . ⊢  f o f@0[L[c]-1:=n-1] ∈ ℕL[c]→ℕn
. | . | | . | .   by (NthHypSq -1) THEN Analyze THEN Analyze
. | . | | . | .      THEN
. | . | | . | .      Analyze
. | . | | . |

. | . | | . |\
. | . | | . | 1. r : ℕ
. | . | | . | 2. k : ℕ
. | . | | . | 3. L : ℕ List
. | . | | . | 4. R : ℕ List
. | . | | . | 5. 2≤k
. | . | | . | 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | 8. r->R^k-1
. | . | | . | 9. n : ℕ
. | . | | . | 10. r+1≤n
. | . | | . | 11. G :
. | . | | . | |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | |    | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | |   →ℕ||L||
. | . | | . | 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | |   ||s|| = k-1
. | . | | . | |   ⇒
. | . | | . | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | |   ⇒
. | . | | . | |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | 16. 0<L[c]
. | . | | . | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | | . | |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | |      | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | 21. increasing(f@0;L[c]-1)
```

```
. | . | | . | 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | |   ||s|| = k
. | . | | . | |   ⇒
. | . | | . | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | |   ⇒
. | . | | . | |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | ⊢  increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | |  & (∀s:ℕL[c] List.
. | . | | . | |     ||s|| = k
. | . | | . | |     ⇒
. | . | | . | |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | |     ⇒
. | . | | . | |     G(map(f o f@0[L[c]-1:=n-1];s)) = c)  by Analyze 0
. | . | | . | |
. | . | | . | |\
. | . | | . | | 1. r : ℕ
. | . | | . | | 2. k : ℕ
. | . | | . | | 3. L : ℕ List
. | . | | . | | 4. R : ℕ List
. | . | | . | | 5. 2≤k
. | . | | . | | 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | | 8. r->R^k-1
. | . | | . | | 9. n : ℕ
. | . | | . | | 10. r+1≤n
. | . | | . | | 11. G :
. | . | | . | | |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | | |    | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | | |   →ℕ||L||
. | . | | . | | 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | | 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | | |   ||s|| = k-1
. | . | | . | | |   ⇒
. | . | | . | | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | | |   ⇒
. | . | | . | | |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | | 16. 0<L[c]
. | . | | . | | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | | 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | . | | |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | | |      | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | | |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | | 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | | 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | | 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | | 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | | |   ||s|| = k
. | . | | . | | |   ⇒
. | . | | . | | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | | |   ⇒
. | . | | . | | |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | | ⊢  increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | | | by (BackThru
```

```
. | . | | . | | |     Thm* ∀n,m:ℕ+, f:(ℕ(n-1)→ℕ(m-1)).
. | . | | . | | |          increasing(f;n-1)
. | . | | . | | |          ⇒
. | . | | . | | |          increasing(f[n-1:=m-1];n)
. | . | | . | | |     {fappend_DASH_increasing})
. | . | | . | | |    THENA
. | . | | . | | |    ((Try (Complete Auto)) THEN Analyze)
. | . | | . | | |
. | . | | . | | 1. r : ℕ
. | . | | . | | 2. k : ℕ
. | . | | . | | 3. L : ℕ List
. | . | | . | | 4. R : ℕ List
. | . | | . | | 5. 2≤k
. | . | | . | | 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | | 8. r->R^k-1
. | . | | . | | 9. n : ℕ
. | . | | . | | 10. r+1≤n
. | . | | . | | 11. G :
. | . | | . | |     {s:(ℕn List)
. | . | | . | |      | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | |     →ℕ||L||
. | . | | . | | 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | | 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | |     ||s|| = k-1
. | . | | . | |     ⇒
. | . | | . | |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | |     ⇒
. | . | | . | |     G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | | 16. 0<L[c]
. | . | | . | | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | | 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | . | |     ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | |        | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | |       →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | | 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | | 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | | 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | | 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | |     ||s|| = k
. | . | | . | |     ⇒
. | . | | . | |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | |     ⇒
. | . | | . | |     G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | | ⊢  increasing(f o f@0;L[c]-1)
. | . | | . | |   by BackThru
. | . | | . | |      Thm* ∀k,m:ℕ, f:(ℕk→ℕm), g:(ℕm→ℤ).
. | . | | . | |           increasing(f;k)
. | . | | . | |           ⇒
. | . | | . | |           increasing(g;m) ⇒ increasing(g o f;k)
. | . | | . | |      {compose_increasing}
. | . | | . | |
. | . | | . | .\
```

```
. | . | | . | . 1. r : ℕ
. | . | | . | . 2. k : ℕ
. | . | | . | . 3. L : ℕ List
. | . | | . | . 4. R : ℕ List
. | . | | . | . 5. 2≤k
. | . | | . | . 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . 8. r->R^k-1
. | . | | . | . 9. n : ℕ
. | . | | . | . 10. r+1≤n
. | . | | . | . 11. G :
. | . | | . | . |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . |    | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . |   →ℕ||L||
. | . | | . | . 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . |   ⇒
. | . | | . | . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . |   ⇒
. | . | | . | . |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . 16. 0<L[c]
. | . | | . | . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . |      | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . |   ||s|| = k
. | . | | . | . |   ⇒
. | . | | . | . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . |   ⇒
. | . | | . | . |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . ⊢  ∀s:ℕL[c] List.
. | . | | . | . |  ||s|| = k
. | . | | . | . |  ⇒
. | . | | . | . |  (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . |  ⇒
. | . | | . | . |  G(map(f o f@0[L[c]-1:=n-1];s)) = c  by Auto
. | . | | . | . |
. | . | | . | . 1. r : ℕ
. | . | | . | . 2. k : ℕ
. | . | | . | . 3. L : ℕ List
. | . | | . | . 4. R : ℕ List
. | . | | . | . 5. 2≤k
. | . | | . | . 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . 8. r->R^k-1
. | . | | . | . 9. n : ℕ
```

```
. | . | | . | . 10. r+1≤n
. | . | | . | . 11. G :
. | . | | . | . |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . |    | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . |   →ℕ||L||
. | . | | . | . 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . |   ⇒
. | . | | . | . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . |   ⇒
. | . | | . | . |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . 16. 0<L[c]
. | . | | . | . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . |      | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . |   ||s|| = k
. | . | | . | . |   ⇒
. | . | | . | . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . |   ⇒
. | . | | . | . |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . 25. ||s|| = k
. | . | | . | . 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . ⊢  G(map(f o f@0[L[c]-1:=n-1];s)) = c
. | . | | . | . | by Decide (∃i:ℕ||s||. s[i] = L[c]-1)
. | . | | . | . |
. | . | | . | . |\
. | . | | . | . | 1. r : ℕ
. | . | | . | . | 2. k : ℕ
. | . | | . | . | 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | 5. 2≤k
. | . | | . | . | 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | 9. n : ℕ
. | . | | . | . | 10. r+1≤n
. | . | | . | . | 11. G :
. | . | | . | . | |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | |    | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | |   →ℕ||L||
. | . | | . | . | 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | 15. ∀s:ℕR[c] List.
```

```
. | . | | . | . | |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . | |   ⇒
. | . | | . | . | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | |   ⇒
. | . | | . | . | |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | |      | ||s|| = k
. | . | | . | . | |        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | |   ||s|| = k
. | . | | . | . | |   ⇒
. | . | | . | . | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | |   ⇒
. | . | | . | . | |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | 27. ∃i:ℕ||s||. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | ⊢  G(map(f o f@0[L[c]-1:=n-1];s)) = c
. | . | | . | . | | by ExRepD THEN (Decide (i<k-1))
. | . | | . | . | |
. | . | | . | . | |\
. | . | | . | . | | 1. r : ℕ
. | . | | . | . | | 2. k : ℕ
. | . | | . | . | | 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | | 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | | 5. 2≤k
. | . | | . | . | | 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | | 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | | 9. n : ℕ
. | . | | . | . | | 10. r+1≤n
. | . | | . | . | | 11. G :
. | . | | . | . | | |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | | |     | ||s|| = k
. | . | | . | . | | |       & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | | |   →ℕ||L||
. | . | | . | . | | 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | | 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | | |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . | | |   ⇒
. | . | | . | . | | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | | |   ⇒
. | . | | . | . | | |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | | 16. 0<L[c]
```

```
. | . | | . | . | | | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | | | 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | | | |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | | | |      | ||s|| = k
. | . | | . | . | | | |        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | | | |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | | | 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | | | 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | | | 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | | | 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | | | |   ||s|| = k
. | . | | . | . | | | |   ⇒
. | . | | . | . | | | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | | | |   ⇒
. | . | | . | . | | | |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | | | 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | | | 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | | | 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | | | 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | | | 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | | | 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | | | 29. i<k-1
. | . | | . | . | | | ⊢  G(map(f o f@0[L[c]-1:=n-1];s)) = c
. | . | | . | . | | | | by FwdThru -4 [-1]
. | . | | . | . | | | |
. | . | | . | . | | | 1. r : ℕ
. | . | | . | . | | | 2. k : ℕ
. | . | | . | . | | | 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | | | 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | | | 5. 2≤k
. | . | | . | . | | | 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | | | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | | | 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | | | 9. n : ℕ
. | . | | . | . | | | 10. r+1≤n
. | . | | . | . | | | 11. G :
. | . | | . | . | | |     {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | | |      | ||s|| = k
. | . | | . | . | | |        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | | |     →ℕ||L||
. | . | | . | . | | | 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | | | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | | | 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | | | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | | |     ||s|| = k-1
. | . | | . | . | | |     ⇒
. | . | | . | . | | |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | | |     ⇒
. | . | | . | . | | |     G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | | | 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | | | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | | | 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | | |     ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | | |        | ||s|| = k
. | . | | . | . | | |          & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
```

```
. | . | | . | . | |       →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | | 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | | 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | | 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | | 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | |     ||s|| = k
. | . | | . | . | |     ⇒
. | . | | . | . | |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | |     ⇒
. | . | | . | . | |     G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | | 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | | 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | | 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | | 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | | 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | | 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | | 29. i<k-1
. | . | | . | . | | 30. s[i]<s[(k-1)]
. | . | | . | . | | ⊢  G(map(f o f@0[L[c]-1:=n-1];s)) = c  by Auto
. | . | | . | . | |
. | . | | . | . | .\
. | . | | . | . | . 1. r : ℕ
. | . | | . | . | . 2. k : ℕ
. | . | | . | . | . 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | . 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | . 5. 2≤k
. | . | | . | . | . 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | . 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | . 9. n : ℕ
. | . | | . | . | . 10. r+1≤n
. | . | | . | . | . 11. G :
. | . | | . | . | . |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | . |    | ||s|| = k
. | . | | . | . | . |      & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . |   →ℕ||L||
. | . | | . | . | . 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | . 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | . |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . | . |   ⇒
. | . | | . | . | . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . |   ⇒
. | . | | . | . | . |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | . 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | . 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | . |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | . |      | ||s|| = k
. | . | | . | . | . |        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | . 21. increasing(f@0;L[c]-1)
```

```
. | . | | . | . | . 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | . |   ||s|| = k
. | . | | . | . | . |   ⇒
. | . | | . | . | . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . |   ⇒
. | . | | . | . | . |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | . 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | . 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | . 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | . 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | . 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | . 29. ¬i<k-1
. | . | | . | . | . ⊢  G(map(f o f@0[L[c]-1:=n-1];s)) = c
. | . | | . | . | . | by (Assert
. | . | | . | . | . |     (firstn(||s||-1;s) ∈ ℕ(L[c]-1) List
. | . | | . | . | . |      & ||firstn(||s||-1;s)|| = k-1
. | . | | . | . | . |      & (s ~ (firstn(||s||-1;s) @ [(L[c]-1)]))))
. | . | | . | . | . |    THEN
. | . | | . | . | . |    ExRepD
. | . | | . | . | . |
. | . | | . | . | . |\
. | . | | . | . | . | 1. r : ℕ
. | . | | . | . | . | 2. k : ℕ
. | . | | . | . | . | 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | . | 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | . | 5. 2≤k
. | . | | . | . | . | 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | . | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | . | 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | . | 9. n : ℕ
. | . | | . | . | . | 10. r+1≤n
. | . | | . | . | . | 11. G :
. | . | | . | . | . | |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | . | |    | ||s|| = k
. | . | | . | . | . | |      & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . | |   →ℕ||L||
. | . | | . | . | . | 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | . | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | . | 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | . | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | . | |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . | . | |   ⇒
. | . | | . | . | . | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . | |   ⇒
. | . | | . | . | . | |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | . | 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | . | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | . | 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | . | |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | . | |      | ||s|| = k
. | . | | . | . | . | |        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . | |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . | 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . | 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
```

```
. | . | | . | . | . | 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | . | 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | . | |   ||s|| = k
. | . | | . | . | . | |   ⇒
. | . | | . | . | . | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . | |   ⇒
. | . | | . | . | . | |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | . | 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | . | 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | . | 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | . | 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . | 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | . | 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | . | 29. ¬i<k-1
. | . | | . | . | . | ⊢  firstn(||s||-1;s) ∈ ℕ(L[c]-1) List
. | . | | . | . | . | |  & ||firstn(||s||-1;s)|| = k-1
. | . | | . | . | . | |  & (s ∼ (firstn(||s||-1;s) @ [(L[c]-1)]))
. | . | | . | . | . | | by Analyze 0
. | . | | . | . | . | |
. | . | | . | . | . | |\
. | . | | . | . | . | | 1. r : ℕ
. | . | | . | . | . | | 2. k : ℕ
. | . | | . | . | . | | 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | . | | 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | . | | 5. 2≤k
. | . | | . | . | . | | 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | . | | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | . | | 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | . | | 9. n : ℕ
. | . | | . | . | . | | 10. r+1≤n
. | . | | . | . | . | | 11. G :
. | . | | . | . | . | | |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | . | | |    | ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | |      & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . | | |   →ℕ||L||
. | . | | . | . | . | | 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | . | | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | . | | 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | . | | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | . | | |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . | . | | |   ⇒
. | . | | . | . | . | | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . | | |   ⇒
. | . | | . | . | . | | |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | . | | 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | . | | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | . | | 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | . | | |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | . | | |      | ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | |        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . | | |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . | | 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . | | 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | . | | 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | . | | 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
```

```
. | . | | . | . | . | | |   ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | |   ⇒
. | . | | . | . | . | | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . | | |   ⇒
. | . | | . | . | . | | |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | . | | 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | . | | 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | . | | 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . | | 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | . | | 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | . | | 29. ¬i<k-1
. | . | | . | . | . | | ⊢  firstn(||s||-1;s) ∈ ℕ(L[c]-1) List
. | . | | . | . | . | | | by Assert
. | . | | . | . | . | | |    (∀i:ℕ||firstn(||s||-1;s)||.
. | . | | . | . | . | | |     firstn(||s||-1;s)[i]<L[c]-1)
. | . | | . | . | . | | |
. | . | | . | . | . | | |\
. | . | | . | . | . | | | .....assertion .....
. | . | | . | . | . | | | 1. r : ℕ
. | . | | . | . | . | | | 2. k : ℕ
. | . | | . | . | . | | | 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | . | | | 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | . | | | 5. 2≤k
. | . | | . | . | . | | | 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | . | | | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | . | | | 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | . | | | 9. n : ℕ
. | . | | . | . | . | | | 10. r+1≤n
. | . | | . | . | . | | | 11. G :
. | . | | . | . | . | | | |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | . | | | |    | ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | | |      & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . | | | |   →ℕ||L||
. | . | | . | . | . | | | 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | . | | | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | . | | | 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | . | | | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | . | | | |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . | . | | | |   ⇒
. | . | | . | . | . | | | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . | | | |   ⇒
. | . | | . | . | . | | | |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | . | | | 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | . | | | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | . | | | 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | . | | | |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | . | | | |      | ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | | |        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . | | | |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . | | | 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . | | | 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | . | | | 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | . | | | 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | . | | | |   ||s|| = k
```

```
. | . | | . | . | . | | | |   ⇒
. | . | | . | . | . | | | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . | | | |   ⇒
. | . | | . | . | . | | | |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | . | | | | 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | . | | | | 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | . | | | | 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | | | 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . | | | | 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | . | | | | 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | . | | | | 29. ¬i<k-1
. | . | | . | . | . | | | | ⊢  ∀i:ℕ||firstn(||s||-1;s)||.
. | . | | . | . | . | | | |  firstn(||s||-1;s)[i]<L[c]-1
. | . | | . | . | . | | | | by (Inst
. | . | | . | . | . | | | |     Thm* ∀as:A List, n:{0...||as||}.
. | . | | . | . | . | | | |          ||firstn(n;as)|| = n ∈ ℤ
. | . | | . | . | . | | | |     {length_firstn}
. | . | | . | . | . | | | |     [ℕL[c];s;||s||-1])
. | . | | . | . | . | | | |    THEN
. | . | | . | . | . | | | |    (Analyze 0)
. | . | | . | . | . | | | |    THEN
. | . | | . | . | . | | | |    (InstHyp [i1;i] -6)
. | . | | . | . | . | | | |
. | . | | . | . | . | | | 1. r : ℕ
. | . | | . | . | . | | | 2. k : ℕ
. | . | | . | . | . | | | 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | . | | | 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | . | | | 5. 2≤k
. | . | | . | . | . | | | 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | . | | | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | . | | | 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | . | | | 9. n : ℕ
. | . | | . | . | . | | | 10. r+1≤n
. | . | | . | . | . | | | 11. G :
. | . | | . | . | . | | |     {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | . | | |      | ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | |        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . | | |     →ℕ||L||
. | . | | . | . | . | | | 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | . | | | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | . | | | 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | . | | | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | . | | |     ||s|| = k-1
. | . | | . | . | . | | |     ⇒
. | . | | . | . | . | | |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . | | |     ⇒
. | . | | . | . | . | | |     G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | . | | | 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | . | | | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | . | | | 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | . | | |     ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | . | | |        | ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | |          & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . | | |       →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . | | | 19. ℕ||L[c--]||
```

```
. | . | | . | . | . | | | 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | . | | | 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | . | | | 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | . | | |     ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | |     ⇒
. | . | | . | . | . | | |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . | | |     ⇒
. | . | | . | . | . | | |     G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | . | | | 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | . | | | 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | . | | | 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | | 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . | | | 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | . | | | 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | . | | | 29. ¬i<k-1
. | . | | . | . | . | | | 30. ||firstn(||s||-1;s)|| = ||s||-1
. | . | | . | . | . | | | 31. i1 : ℕ||firstn(||s||-1;s)||
. | . | | . | . | . | | | 32. s[i1]<s[i]
. | . | | . | . | . | | | ⊢  firstn(||s||-1;s)[i1]<L[c]-1
. | . | | . | . | . | | |   by RWO
. | . | | . | . | . | | |      Thm* ∀as:T List, n:{0...||as||}, i:ℕn.
. | . | | . | . | . | | |           firstn(n;as)[i] = as[i]
. | . | | . | . | . | | |      {select_firstn}
. | . | | . | . | . | | |      0
. | . | | . | . | . | | |
. | . | | . | . | . | | .\
. | . | | . | . | . | | . 1. r : ℕ
. | . | | . | . | . | | . 2. k : ℕ
. | . | | . | . | . | | . 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | . | | . 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | . | | . 5. 2≤k
. | . | | . | . | . | | . 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | . | | . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | . | | . 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | . | | . 9. n : ℕ
. | . | | . | . | . | | . 10. r+1≤n
. | . | | . | . | . | | . 11. G :
. | . | | . | . | . | | . |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | . | | . |    | ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | . |      & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . | | . |   →ℕ||L||
. | . | | . | . | . | | . 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | . | | . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | . | | . 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | . | | . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | . | | . |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . | . | | . |   ⇒
. | . | | . | . | . | | . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . | | . |   ⇒
. | . | | . | . | . | | . |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | . | | . 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | . | | . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | . | | . 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | . | | . |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | . | | . |      | ||s|| = k
```

```
. | . | | . | . | . | | . |        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . | | . |      →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . | | . 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . | | . 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | . | | . 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | . | | . 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | . | | . |    ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | . |    ⇒
. | . | | . | . | . | | . |    (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . | | . |    ⇒
. | . | | . | . | . | | . |    G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | . | | . 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | . | | . 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | . | | . 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | . 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . | | . 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | . | | . 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | . | | . 29. ¬i<k-1
. | . | | . | . | . | | . 30. ∀i:ℕ||firstn(||s||-1;s)||.
. | . | | . | . | . | | . |    firstn(||s||-1;s)[i]<L[c]-1
. | . | | . | . | . | | . ⊢  firstn(||s||-1;s) ∈ ℕ(L[c]-1) List
. | . | | . | . | . | | . | by ((MoveToConcl -1)
. | . | | . | . | . | | . |      THEN
. | . | | . | . | . | | . |      (GenConcl (firstn(||s||-1;s) = X))
. | . | | . | . | . | | . |      THEN
. | . | | . | . | . | | . |      (Thin -1)
. | . | | . | . | . | | . |      THEN
. | . | | . | . | . | | . |      (MoveToConcl -1)
. | . | | . | . | . | | . |      THEN
. | . | | . | . | . | | . |      (GenConcl (L[c] = a)))
. | . | | . | . | . | | . |     THENA
. | . | | . | . | . | | . |     ((Try (Complete Auto)) THEN Analyze)
. | . | | . | . | . | | . |
. | . | | . | . | . | | . 1. r : ℕ
. | . | | . | . | . | | . 2. k : ℕ
. | . | | . | . | . | | . 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | . | | . 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | . | | . 5. 2≤k
. | . | | . | . | . | | . 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | . | | . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | . | | . 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | . | | . 9. n : ℕ
. | . | | . | . | . | | . 10. r+1≤n
. | . | | . | . | . | | . 11. G :
. | . | | . | . | . | | . |    {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | . | | . |     | ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | . |       & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . | | . |    →ℕ||L||
. | . | | . | . | . | | . 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | . | | . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | . | | . 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | . | | . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | . | | . |    ||s|| = k-1
. | . | | . | . | . | | . |    ⇒
. | . | | . | . | . | | . |    (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
```

```
. | . | | . | . | . | | . |    ⇒
. | . | | . | . | . | | . |    G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | . | | . . 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | . | | . . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | . | | . . 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | . | | . |    ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | . | | . |       | ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | . |         & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . | | . |      →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . | | . . 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . | | . . 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | . | | . . 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | . | | . . 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | . | | . |    ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | . |    ⇒
. | . | | . | . | . | | . |    (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . | | . |    ⇒
. | . | | . | . | . | | . |    G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | . | | . . 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | . | | . . 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | . | | . . 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | . . 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . | | . . 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | . | | . . 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | . | | . . 29. ¬i<k-1
. | . | | . | . | . | | . . 30. a : ℕ+
. | . | | . | . | . | | . . 31. L[c] = a
. | . | | . | . | . | | . ⊢  ∀X:ℕa List.
. | . | | . | . | . | | . |  (∀i:ℕ||X||. X[i]<a-1) ⇒ X ∈ ℕ(a-1) List
. | . | | . | . | . | | . | by InductionOnList
. | . | | . | . | . | | . |
. | . | | . | . | . | | . |\
. | . | | . | . | . | | . | 1. r : ℕ
. | . | | . | . | . | | . | 2. k : ℕ
. | . | | . | . | . | | . | 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | . | | . | 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | . | | . | 5. 2≤k
. | . | | . | . | . | | . | 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | . | | . | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | . | | . | 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | . | | . | 9. n : ℕ
. | . | | . | . | . | | . | 10. r+1≤n
. | . | | . | . | . | | . | 11. G :
. | . | | . | . | . | | . |     {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | . | | . |      | ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | . |        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . | | . |     →ℕ||L||
. | . | | . | . | . | | . | 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | . | | . | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | . | | . | 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | . | | . | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | . | | . |     ||s|| = k-1
. | . | | . | . | . | | . |     ⇒
. | . | | . | . | . | | . |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . | | . |     ⇒
```

```
. | . | | . | . | . | | . |     G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | . | | . | 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | . | | . | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | . | | . | 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | . | | . |     ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | . | | . |        | ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | . |          & (∀x,y:ℕ||s||.
. | . | | . | . | . | | . |              x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . | | . |       →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . | | . | 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . | | . | 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | . | | . | 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | . | | . | 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | . | | . |     ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | . |     ⇒
. | . | | . | . | . | | . |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . | | . |     ⇒
. | . | | . | . | . | | . |     G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | . | | . | 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | . | | . | 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | . | | . | 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | . | 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . | | . | 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | . | | . | 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | . | | . | 29. ¬i<k-1
. | . | | . | . | . | | . | 30. a : ℕ⁺
. | . | | . | . | . | | . | 31. L[c] = a
. | . | | . | . | . | | . | 32. ℕa List
. | . | | . | . | . | | . | 33. u : ℕa
. | . | | . | . | . | | . | 34. v : ℕa List
. | . | | . | . | . | | . | 35. (∀i:ℕ||v||. v[i]<a-1)
. | . | | . | . | . | | . |     ⇒
. | . | | . | . | . | | . |     v ∈ ℕ(a-1) List
. | . | | . | . | . | | . | 36. ∀i:ℕ||[u / v]||. [u / v][i]<a-1
. | . | | . | . | . | | . | ⊢  u<a-1
. | . | | . | . | . | | . |   by (InstHyp [0] -1) THEN (Reduce -1)
. | . | | . | . | . | | . |
. | . | | . | . | . | | . .\
. | . | | . | . | . | | . . .....subterm .....
. | . | | . | . | . | | . . 1. r : ℕ
. | . | | . | . | . | | . . 2. k : ℕ
. | . | | . | . | . | | . . 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | . | | . . 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | . | | . . 5. 2≤k
. | . | | . | . | . | | . . 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | . | | . . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | . | | . . 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | . | | . . 9. n : ℕ
. | . | | . | . | . | | . . 10. r+1≤n
. | . | | . | . | . | | . . 11. G :
. | . | | . | . | . | | . . |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | . | | . . |     | ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | . . |       & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . | | . . |   →ℕ||L||
. | . | | . | . | . | | . . 12. c : ℕ||R||
```

```
. | . | | . | . | . | | . . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | . | | . . 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | . | | . . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | . | | . . |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . | . | | . . |   ⇒
. | . | | . | . | . | | . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . | | . . |   ⇒
. | . | | . | . | . | | . . |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | . | | . . 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | . | | . . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | . | | . . 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | . | | . . |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | . | | . . |      | ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | . . |        & (∀x,y:ℕ||s||.
. | . | | . | . | . | | . . |            x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . | | . . |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . | | . . 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . | | . . 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | . | | . . 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | . | | . . 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | . | | . . |   ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | . . |   ⇒
. | . | | . | . | . | | . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . | | . . |   ⇒
. | . | | . | . | . | | . . |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | . | | . . 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | . | | . . 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | . | | . . 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | . . 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . | | . . 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | . | | . . 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | . | | . . 29. ¬i<k-1
. | . | | . | . | . | | . . 30. a : ℕ+
. | . | | . | . | . | | . . 31. L[c] = a
. | . | | . | . | . | | . . 32. ℕa List
. | . | | . | . | . | | . . 33. u : ℕa
. | . | | . | . | . | | . . 34. v : ℕa List
. | . | | . | . | . | | . . 35. (∀i:ℕ||v||. v[i]<a-1)
. | . | | . | . | . | | . . |   ⇒
. | . | | . | . | . | | . . |   v ∈ ℕ(a-1) List
. | . | | . | . | . | | . . 36. ∀i:ℕ||[u / v]||. [u / v][i]<a-1
. | . | | . | . | . | | . . ⊢  v ∈ ℕ(a-1) List

. | . | | . | . | . | | . . | by (Analyze -2) THEN (Try Trivial)
. | . | | . | . | . | | . . |
. | . | | . | . | . | | . . .....antecedent .....
. | . | | . | . | . | | . . 1. r : ℕ
. | . | | . | . | . | | . . 2. k : ℕ
. | . | | . | . | . | | . . 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | . | | . . 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | . | | . . 5. 2≤k
. | . | | . | . | . | | . . 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | . | | . . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | . | | . . 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | . | | . . 9. n : ℕ
. | . | | . | . | . | | . . 10. r+1≤n
```

```
. | . | | . | . | . | | . . 11. G :
. | . | | . | . | . | | . .     {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | . | | . .      | ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | . .        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . | | . .     →ℕ||L||
. | . | | . | . | . | | . . 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | . | | . . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | . | | . . 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | . | | . . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | . | | . .     ||s|| = k-1
. | . | | . | . | . | | . .     ⇒
. | . | | . | . | . | | . .     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . | | . .     ⇒
. | . | | . | . | . | | . .     G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | . | | . . 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | . | | . . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | . | | . . 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | . | | . .     ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | . | | . .        | ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | . .          & (∀x,y:ℕ||s||.
. | . | | . | . | . | | . .              x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . | | . .       →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . | | . . 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . | | . . 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | . | | . . 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | . | | . . 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | . | | . .     ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | . .     ⇒
. | . | | . | . | . | | . .     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . | | . .     ⇒
. | . | | . | . | . | | . .     G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | . | | . . 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | . | | . . 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | . | | . . 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | . | | . . 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . | | . . 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | . | | . . 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | . | | . . 29. ¬i<k-1
. | . | | . | . | . | | . . 30. a : ℕ+
. | . | | . | . | . | | . . 31. L[c] = a
. | . | | . | . | . | | . . 32. ℕa List
. | . | | . | . | . | | . . 33. u : ℕa
. | . | | . | . | . | | . . 34. v : ℕa List
. | . | | . | . | . | | . . 35. ∀i:ℕ||[u / v]||. [u / v][i]<a-1
. | . | | . | . | . | | . . ⊢  ∀i:ℕ||v||. v[i]<a-1
. | . | | . | . | . | | . .   by Auto THEN (InstHyp [i1+1] -2)
. | . | | . | . | . | | . .      THEN
. | . | | . | . | . | | . .      (RWO
. | . | | . | . | . | | . .       Thm* ∀a:T, as:T List, i:ℤ.
. | . | | . | . | . | | . .              0<i
. | . | | . | . | . | | . .              ⇒
. | . | | . | . | . | | . .              i≤||as||
. | . | | . | . | . | | . .              ⇒
. | . | | . | . | . | | . .              [a / as][i] = as[(i-1)]
. | . | | . | . | . | | . .       {select_cons_tl}
```

```
. | . | | . | . | . | | . .       -1)
. | . | | . | . | . | |
. | . | | . | . | . | .\
. | . | | . | . | . | . 1. r : ℕ
. | . | | . | . | . | . 2. k : ℕ
. | . | | . | . | . | . 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | . | . 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | . | . 5. 2≤k
. | . | | . | . | . | . 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | . | . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | . | . 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | . | . 9. n : ℕ
. | . | | . | . | . | . 10. r+1≤n
. | . | | . | . | . | . 11. G :
. | . | | . | . | . | . |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | . | . |    | ||s|| = k
. | . | | . | . | . | . |      & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . | . |   →ℕ||L||
. | . | | . | . | . | . 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | . | . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | . | . 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | . | . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | . | . |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . | . | . |   ⇒
. | . | | . | . | . | . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . | . |   ⇒
. | . | | . | . | . | . |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | . | . 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | . | . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | . | . 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | . | . |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | . | . |      | ||s|| = k
. | . | | . | . | . | . |        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . | . |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . | . 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . | . 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | . | . 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | . | . 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | . | . |   ||s|| = k
. | . | | . | . | . | . |   ⇒
. | . | | . | . | . | . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . | . |   ⇒
. | . | | . | . | . | . |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | . | . 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | . | . 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | . | . 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | . | . 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . | . 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | . | . 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | . | . 29. ¬i<k-1
. | . | | . | . | . | . ⊢  ||firstn(||s||-1;s)|| = k-1
. | . | | . | . | . | . |  & (s ~ (firstn(||s||-1;s) @ [(L[c]-1)]))
. | . | | . | . | . | . | by Analyze 0
. | . | | . | . | . | . |
. | . | | . | . | . | . |\
```

```
. | . | | . | . | . | . | 1. r : ℕ
. | . | | . | . | . | . | 2. k : ℕ
. | . | | . | . | . | . | 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | . | . | 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | . | . | 5. 2≤k
. | . | | . | . | . | . | 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | . | . | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | . | . | 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | . | . | 9. n : ℕ
. | . | | . | . | . | . | 10. r+1≤n
. | . | | . | . | . | . | 11. G :
. | . | | . | . | . | . |     {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | . | . |      | ||s|| = k
. | . | | . | . | . | . |        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . | . |     →ℕ||L||
. | . | | . | . | . | . | 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | . | . | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | . | . | 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | . | . | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | . | . |     ||s|| = k-1
. | . | | . | . | . | . |     ⇒
. | . | | . | . | . | . |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . | . |     ⇒
. | . | | . | . | . | . |     G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | . | . | 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | . | . | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | . | . | 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | . | . |     ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | . | . |         | ||s|| = k
. | . | | . | . | . | . |           & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . | . |       →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . | . | 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . | . | 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | . | . | 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | . | . | 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | . | . |     ||s|| = k
. | . | | . | . | . | . |     ⇒
. | . | | . | . | . | . |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . | . |     ⇒
. | . | | . | . | . | . |     G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | . | . | 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | . | . | 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | . | . | 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | . | . | 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . | . | 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | . | . | 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | . | . | 29. ¬i<k-1
. | . | | . | . | . | . | ⊢  ||firstn(||s||-1;s)|| = k-1
. | . | | . | . | . | . |   by RWO
. | . | | . | . | . | . |      Thm* ∀as:A List, n:{0...||as||}.
. | . | | . | . | . | . |           ||firstn(n;as)|| = n ∈ ℤ
. | . | | . | . | . | . |      {length_firstn}
. | . | | . | . | . | . |      0
. | . | | . | . | . | . |
. | . | | . | . | . | . .\
```

```
. | . | | . | . | . | . . 1. r : ℕ
. | . | | . | . | . | . . 2. k : ℕ
. | . | | . | . | . | . . 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | . | . . 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | . | . . 5. 2≤k
. | . | | . | . | . | . . 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | . | . . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | . | . . 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | . | . . 9. n : ℕ
. | . | | . | . | . | . . 10. r+1≤n
. | . | | . | . | . | . . 11. G :
. | . | | . | . | . | . . |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | . | . . |    | ||s|| = k
. | . | | . | . | . | . . |      & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . | . . |   →ℕ||L||
. | . | | . | . | . | . . 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | . | . . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | . | . . 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | . | . . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | . | . . |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . | . | . . |   ⇒
. | . | | . | . | . | . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . | . . |   ⇒
. | . | | . | . | . | . . |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | . | . . 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | . | . . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | . | . . 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | . | . . |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | . | . . |      | ||s|| = k
. | . | | . | . | . | . . |        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . | . . |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . | . . 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . | . . 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | . | . . 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | . | . . 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | . | . . |   ||s|| = k
. | . | | . | . | . | . . |   ⇒
. | . | | . | . | . | . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . | . . |   ⇒
. | . | | . | . | . | . . |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | . | . . 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | . | . . 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | . | . . 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | . | . . 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . | . . 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | . | . . 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | . | . . 29. ¬i<k-1
. | . | | . | . | . | . . ⊢  s ~ (firstn(||s||-1;s) @ [(L[c]-1)])
. | . | | . | . | . | . . | by (RevHypSubst' -2 0)
. | . | | . | . | . | . . |    THEN
. | . | | . | . | . | . . |    (Subst' (i = ||s||-1) 0)
. | . | | . | . | . | . . |
. | . | | . | . | . | . . 1. r : ℕ
. | . | | . | . | . | . . 2. k : ℕ
. | . | | . | . | . | . . 3. L : ℕ List
```

```
. | . | | . | . | . | . . 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | . | . . 5. 2≤k
. | . | | . | . | . | . . 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | . | . . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | . | . . 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | . | . . 9. n : ℕ
. | . | | . | . | . | . . 10. r+1≤n
. | . | | . | . | . | . . 11. G :
. | . | | . | . | . | . . |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | . | . . |    | ||s|| = k
. | . | | . | . | . | . . |      & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . | . . |   →ℕ||L||
. | . | | . | . | . | . . 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | . | . . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | . | . . 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | . | . . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | . | . . |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . | . | . . |   ⇒
. | . | | . | . | . | . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . | . . |   ⇒
. | . | | . | . | . | . . |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | . | . . 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | . | . . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | . | . . 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | . | . . |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | . | . . |       | ||s|| = k
. | . | | . | . | . | . . |         & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . | . . |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . | . . 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . | . . 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | . | . . 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | . | . . 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | . | . . |   ||s|| = k
. | . | | . | . | . | . . |   ⇒
. | . | | . | . | . | . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . | . . |   ⇒
. | . | | . | . | . | . . |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | . | . . 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | . | . . 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | . | . . 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | . | . . 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . | . . 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | . | . . 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | . | . . 29. ¬i<k-1
. | . | | . | . | . | . . ⊢  s ~ (firstn(||s||-1;s) @ [s[(||s||-1)]])
. | . | | . | . | . | . . | by AssertBY (0<||s||) Auto
. | . | | . | . | . | . . |
. | . | | . | . | . | . . 1. r : ℕ
. | . | | . | . | . | . . 2. k : ℕ
. | . | | . | . | . | . . 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | . | . . 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | . | . . 5. 2≤k
. | . | | . | . | . | . . 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | . | . . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | . | . . 8. r->R^k-1
```

```
. | . | | . | . | . | . . 9. n : ℕ
. | . | | . | . | . | . . 10. r+1≤n
. | . | | . | . | . | . . 11. G :
. | . | | . | . | . | . .     {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | . | . .      | ||s|| = k
. | . | | . | . | . | . .        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . | . .     →ℕ||L||
. | . | | . | . | . | . . 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | . | . . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | . | . . 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | . | . . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | . | . .     ||s|| = k-1
. | . | | . | . | . | . .     ⇒
. | . | | . | . | . | . .     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . | . .     ⇒
. | . | | . | . | . | . .     G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | . | . . 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | . | . . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | . | . . 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | . | . .     ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | . | . .        | ||s|| = k
. | . | | . | . | . | . .          & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . | . .       →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . | . . 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . | . . 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | . | . . 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | . | . . 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | . | . .     ||s|| = k
. | . | | . | . | . | . .     ⇒
. | . | | . | . | . | . .     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . | . .     ⇒
. | . | | . | . | . | . .     G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | . | . . 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | . | . . 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | . | . . 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | . | . . 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . | . . 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | . | . . 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | . | . . 29. ¬i<k-1
. | . | | . | . | . | . . 30. 0<||s||
. | . | | . | . | . | . . ⊢  s ~ (firstn(||s||-1;s) @ [s[(||s||-1)]])
. | . | | . | . | . | . .   by BackThru
. | . | | . | . | . | . .      Thm* ∀s:T List.
. | . | | . | . | . | . .           0<||s||
. | . | | . | . | . | . .           ⇒
. | . | | . | . | . | . .           (s ~ (firstn(||s||-1;s)
. | . | | . | . | . | . .            @ [s[(||s||-1)]]))
. | . | | . | . | . | . .      {list_DASH_decomp_DASH_last}
. | . | | . | . | . |
. | . | | . | . | . . .\
. | . | | . | . | . . . 1. r : ℕ
. | . | | . | . | . . . 2. k : ℕ
. | . | | . | . | . . . 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | . . . 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | . . . 5. 2≤k
```

```
. | . | | . | . | . . 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | . . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | . . 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | . . 9. n : ℕ
. | . | | . | . | . . 10. r+1≤n
. | . | | . | . | . . 11. G :
. | . | | . | . | . . |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | . . |    | ||s|| = k
. | . | | . | . | . . |      & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . . |   →ℕ||L||
. | . | | . | . | . . 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | . . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | . . 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | . . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | . . |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . | . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | . . 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | . . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | . . 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | . . |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | . . |       | ||s|| = k
. | . | | . | . | . . |         & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . . |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . . 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . . 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | . . 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | . . 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | . . |   ||s|| = k
. | . | | . | . | . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | . . 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | . . 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | . . 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | . . 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . . 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | . . 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | . . 29. ¬i<k-1
. | . | | . | . | . . 30. firstn(||s||-1;s) ∈ ℕ(L[c]-1) List
. | . | | . | . | . . 31. ||firstn(||s||-1;s)|| = k-1
. | . | | . | . | . . 32. s ∼ (firstn(||s||-1;s) @ [(L[c]-1)])
. | . | | . | . | . . ⊢  G(map(f o f@0[L[c]-1:=n-1];s)) = c
. | . | | . | . | . . | by HypSubst -1 0
. | . | | . | . | . . |
. | . | | . | . | . . 1. r : ℕ
. | . | | . | . | . . 2. k : ℕ
. | . | | . | . | . . 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | . . 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | . . 5. 2≤k
. | . | | . | . | . . 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | . . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
```

```
. | . | | . | . | . . 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | . . 9. n : ℕ
. | . | | . | . | . . 10. r+1≤n
. | . | | . | . | . . 11. G :
. | . | | . | . | . . |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | . . |    | ||s|| = k
. | . | | . | . | . . |      & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . . |   →ℕ||L||
. | . | | . | . | . . 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | . . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | . . 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | . . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | . . |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . | . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | . . 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | . . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | . . 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | . . |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | . . |      | ||s|| = k
. | . | | . | . | . . |        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . . |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . . 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . . 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | . . 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | . . 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | . . |   ||s|| = k
. | . | | . | . | . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | . . 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | . . 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | . . 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | . . 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . . 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | . . 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | . . 29. ¬i<k-1
. | . | | . | . | . . 30. firstn(||s||-1;s) ∈ ℕ(L[c]-1) List
. | . | | . | . | . . 31. ||firstn(||s||-1;s)|| = k-1
. | . | | . | . | . . 32. s ~ (firstn(||s||-1;s) @ [(L[c]-1)])
. | . | | . | . | . . ⊢  G(map(f o f@0[L[c]-1:=n-1];firstn(||s||-1;s)
. | . | | . | . | . . |   @ [(L[c]-1)]))
. | . | | . | . | . . |  =
. | . | | . | . | . . |  c
. | . | | . | . | . . | by (RWO
. | . | | . | . | . . |     Thm* ∀f,as':Top, A:Type, as:A List.
. | . | | . | . | . . |          map(f;as @ as') ~ (map(f;as)
. | . | | . | . | . . |          @ map(f;as'))
. | . | | . | . | . . |     {map_append_sq}
. | . | | . | . | . . |     0)
. | . | | . | . | . . |    THEN
. | . | | . | . | . . |    (Reduce 0)
```

```
. | . | | . | . | . . . |    THEN
. | . | | . | . | . . . |    (Subst
. | . | | . | . | . . . |     ((f o f@0[L[c]-1:=n-1](L[c]-1)) ~ (n-1))
. | . | | . | . | . . . |     0)
. | . | | . | . | . . . |
. | . | | . | . | . . . |\
. | . | | . | . | . . . | .....equality .....
. | . | | . | . | . . . | 1. r : ℕ
. | . | | . | . | . . . | 2. k : ℕ
. | . | | . | . | . . . | 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | . . . | 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | . . . | 5. 2≤k
. | . | | . | . | . . . | 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | . . . | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | . . . | 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | . . . | 9. n : ℕ
. | . | | . | . | . . . | 10. r+1≤n
. | . | | . | . | . . . | 11. G :
. | . | | . | . | . . . |     {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | . . . |      | ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . |        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . . . |     →ℕ||L||
. | . | | . | . | . . . | 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | . . . | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | . . . | 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | . . . | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | . . . |     ||s|| = k-1
. | . | | . | . | . . . |     ⇒
. | . | | . | . | . . . |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . . . |     ⇒
. | . | | . | . | . . . |     G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | . . . | 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | . . . | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | . . . | 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | . . . |     ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | . . . |        | ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . |          & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . . . |       →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . . . | 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . . . | 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | . . . | 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | . . . | 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | . . . |     ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . |     ⇒
. | . | | . | . | . . . |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . . . |     ⇒
. | . | | . | . | . . . |     G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | . . . | 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | . . . | 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | . . . | 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . | 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . . . | 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | . . . | 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | . . . | 29. ¬i<k-1
. | . | | . | . | . . . | 30. firstn(||s||-1;s) ∈ ℕ(L[c]-1) List
```

```
. | . | | . | . | . . | 31. ||firstn(||s||-1;s)|| = k-1
. | . | | . | . | . . | 32. s ~ (firstn(||s||-1;s) @ [(L[c]-1)])
. | . | | . | . | . . | ⊢  (f o f@0[L[c]-1:=n-1](L[c]-1)) ~ (n-1)
. | . | | . | . | . . |   by (Unfold ‘fappend‘ 0) THEN (Reduce 0)
. | . | | . | . | . . |      THEN
. | . | | . | . | . . |      SplitOnConclITE
. | . | | . | . | . . |      THEN
. | . | | . | . | . . |      Analyze
. | . | | . | . | . . |
. | . | | . | . | . . .\
. | . | | . | . | . . . 1. r : ℕ
. | . | | . | . | . . . 2. k : ℕ
. | . | | . | . | . . . 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | . . . 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | . . . 5. 2≤k
. | . | | . | . | . . . 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | . . . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | . . . 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | . . . 9. n : ℕ
. | . | | . | . | . . . 10. r+1≤n
. | . | | . | . | . . . 11. G :
. | . | | . | . | . . . |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | . . . |    | ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . |      & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . . . |   →ℕ||L||
. | . | | . | . | . . . 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | . . . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | . . . 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | . . . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | . . . |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . | . . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . . |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | . . . 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | . . . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | . . . 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | . . . |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | . . . |      | ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . |        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . . . |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . . . 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . . . 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | . . . 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | . . . 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | . . . |   ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . . |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | . . . 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | . . . 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | . . . 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . . . 27. i : ℕ||s||
```

```
. | . | | . | . | . . . 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | . . . 29. ¬i<k-1
. | . | | . | . | . . . 30. firstn(||s||-1;s) ∈ ℕ(L[c]-1) List
. | . | | . | . | . . . 31. ||firstn(||s||-1;s)|| = k-1
. | . | | . | . | . . . 32. s ∼ (firstn(||s||-1;s) @ [(L[c]-1)])
. | . | | . | . | . . . ⊢  G(map(f o f@0[L[c]-1:=n-1];firstn(||s||
. | . | | . | . | . . . |   -1;s))
. | . | | . | . | . . . |   @ [(n-1)])
. | . | | . | . | . . . |  =
. | . | | . | . | . . . |  c
. | . | | . | . | . . . | by Subst
. | . | | . | . | . . . |    (map(f o f@0[L[c]-1:=n-1];firstn(||s||
. | . | | . | . | . . . |     -1;s)) ∼ map(f o f@0;firstn(||s||-1;s)))
. | . | | . | . | . . . |    0
. | . | | . | . | . . . |
. | . | | . | . | . . . |\
. | . | | . | . | . . . | .....equality .....
. | . | | . | . | . . . | 1. r : ℕ
. | . | | . | . | . . . | 2. k : ℕ
. | . | | . | . | . . . | 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | . . . | 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | . . . | 5. 2≤k
. | . | | . | . | . . . | 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | . . . | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | . . . | 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | . . . | 9. n : ℕ
. | . | | . | . | . . . | 10. r+1≤n
. | . | | . | . | . . . | 11. G :
. | . | | . | . | . . . | |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | . . . | |    | ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . | |      & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . . . | |   →ℕ||L||
. | . | | . | . | . . . | 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | . . . | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | . . . | 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | . . . | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | . . . | |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . | . . . | |   ⇒
. | . | | . | . | . . . | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . . . | |   ⇒
. | . | | . | . | . . . | |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | . . . | 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | . . . | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | . . . | 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | . . . | |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | . . . | |      | ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . | |        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . . . | |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . . . | 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . . . | 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | . . . | 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | . . . | 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | . . . | |   ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . | |   ⇒
. | . | | . | . | . . . | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
```

```
. | . | | . | . | . . . | |   ⇒
. | . | | . | . | . . . | |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | . . . | 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | . . . | 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | . . . | 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . | 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . . . | 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | . . . | 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | . . . | 29. ¬i<k-1
. | . | | . | . | . . . | 30. firstn(||s||-1;s) ∈ ℕ(L[c]-1) List
. | . | | . | . | . . . | 31. ||firstn(||s||-1;s)|| = k-1
. | . | | . | . | . . . | 32. s ~ (firstn(||s||-1;s) @ [(L[c]-1)])
. | . | | . | . | . . . | ⊢  map(f o f@0[L[c]-1:=n-1];firstn(||s||
. | . | | . | . | . . . | |  -1;s)) ~ map(f o f@0;firstn(||s||-1;s))
. | . | | . | . | . . . | | by (GenConclAtAddr [2;2]) THEN (Thin -1)
. | . | | . | . | . . . | |    THEN
. | . | | . | . | . . . | |    (MoveToConcl -1)
. | . | | . | . | . . . | |    THEN
. | . | | . | . | . . . | |    (GenConcl (L[c]-1 = a))
. | . | | . | . | . . . | |
. | . | | . | . | . . . | 1. r : ℕ
. | . | | . | . | . . . | 2. k : ℕ
. | . | | . | . | . . . | 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | . . . | 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | . . . | 5. 2≤k
. | . | | . | . | . . . | 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | . . . | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | . . . | 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | . . . | 9. n : ℕ
. | . | | . | . | . . . | 10. r+1≤n
. | . | | . | . | . . . | 11. G :
. | . | | . | . | . . . | |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | . . . | |    | ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . | |      & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . . . | |   →ℕ||L||
. | . | | . | . | . . . | 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | . . . | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | . . . | 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | . . . | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | . . . | |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . | . . . | |   ⇒
. | . | | . | . | . . . | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . . . | |   ⇒
. | . | | . | . | . . . | |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | . . . | 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | . . . | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | . . . | 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | . . . | |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | . . . | |      | ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . | |        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . . . | |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . . . | 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . . . | 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | . . . | 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | . . . | 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
```

```
. | . | | . | . | . . . . | |   ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . | |   ⇒
. | . | | . | . | . . . . | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . . . . | |   ⇒
. | . | | . | . | . . . . | |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | . . . . | 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | . . . . | 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | . . . . | 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . | 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . . . . | 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | . . . . | 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | . . . . | 29. ¬i<k-1
. | . | | . | . | . . . . | 30. firstn(||s||-1;s) ∈ ℕ(L[c]-1) List
. | . | | . | . | . . . . | 31. ||firstn(||s||-1;s)|| = k-1
. | . | | . | . | . . . . | 32. s ~ (firstn(||s||-1;s) @ [(L[c]-1)])
. | . | | . | . | . . . . | 33. a : ℕ
. | . | | . | . | . . . . | 34. L[c]-1 = a
. | . | | . | . | . . . . | ⊢  ∀z:ℕa List.
. | . | | . | . | . . . . | |  map(f o f@0[a:=n-1];z) ~ map(f o f@0;z)
. | . | | . | . | . . . . | | by InductionOnList THEN (Reduce 0)
. | . | | . | . | . . . . | |    THEN
. | . | | . | . | . . . . | |    Analyze
. | . | | . | . | . . . . | |    THEN
. | . | | . | . | . . . . | |    (Try Trivial)
. | . | | . | . | . . . . | |
. | . | | . | . | . . . . | 1. r : ℕ
. | . | | . | . | . . . . | 2. k : ℕ
. | . | | . | . | . . . . | 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | . . . . | 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | . . . . | 5. 2≤k
. | . | | . | . | . . . . | 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | . . . . | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | . . . . | 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | . . . . | 9. n : ℕ
. | . | | . | . | . . . . | 10. r+1≤n
. | . | | . | . | . . . . | 11. G :
. | . | | . | . | . . . . |     {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | . . . . |      | ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . |        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . . . . |     →ℕ||L||
. | . | | . | . | . . . . | 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | . . . . | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | . . . . | 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | . . . . | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | . . . . |     ||s|| = k-1
. | . | | . | . | . . . . |     ⇒
. | . | | . | . | . . . . |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . . . . |     ⇒
. | . | | . | . | . . . . |     G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | . . . . | 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | . . . . | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | . . . . | 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | . . . . |     ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | . . . . |        | ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . |          & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
```

```
. | . | | . | . | . . . |       →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . . . | 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . . . | 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | . . . | 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | . . . | 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | . . . |     ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . |     ⇒
. | . | | . | . | . . . |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . . . |     ⇒
. | . | | . | . | . . . |     G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | . . . | 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | . . . | 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | . . . | 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . | 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . . . | 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | . . . | 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | . . . | 29. ¬i<k-1
. | . | | . | . | . . . | 30. firstn(||s||-1;s) ∈ ℕ(L[c]-1) List
. | . | | . | . | . . . | 31. ||firstn(||s||-1;s)|| = k-1
. | . | | . | . | . . . | 32. s ~ (firstn(||s||-1;s) @ [(L[c]-1)])
. | . | | . | . | . . . | 33. a : ℕ
. | . | | . | . | . . . | 34. L[c]-1 = a
. | . | | . | . | . . . | 35. ℕa List
. | . | | . | . | . . . | 36. u : ℕa
. | . | | . | . | . . . | 37. v : ℕa List
. | . | | . | . | . . . | 38. map(f o f@0[a:=n-1];v) ~ map(f o f@0;v)
. | . | | . | . | . . . | ⊢  (f o f@0[a:=n-1](u)) ~ (f(f@0(u)))
. | . | | . | . | . . . |   by (Unfold ‘fappend‘ 0) THEN (Reduce 0)
. | . | | . | . | . . . |      THEN
. | . | | . | . | . . . |      SplitOnConclITE
. | . | | . | . | . . . |
. | . | | . | . | . . . .\
. | . | | . | . | . . . . 1. r : ℕ
. | . | | . | . | . . . . 2. k : ℕ
. | . | | . | . | . . . . 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | . . . . 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | . . . . 5. 2≤k
. | . | | . | . | . . . . 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | . . . . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | . . . . 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | . . . . 9. n : ℕ
. | . | | . | . | . . . . 10. r+1≤n
. | . | | . | . | . . . . 11. G :
. | . | | . | . | . . . . |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | . . . . |    | ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . |      & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . . . . |   →ℕ||L||
. | . | | . | . | . . . . 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | . . . . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | . . . . 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | . . . . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | . . . . |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . | . . . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . . . . |   ⇒
```

```
. | . | | . | . | . . . . . |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | . . . . . 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | . . . . . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | . . . . . 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | . . . . . |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | . . . . . |      | ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . . |        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . . . . . |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . . . . . 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . . . . . 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | . . . . . 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | . . . . . 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | . . . . . |   ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . . . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . . . . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . . . . |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | . . . . . 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | . . . . . 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | . . . . . 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . . 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . . . . . 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | . . . . . 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | . . . . . 29. ¬i<k-1
. | . | | . | . | . . . . . 30. firstn(||s||-1;s) ∈ ℕ(L[c]-1) List
. | . | | . | . | . . . . . 31. ||firstn(||s||-1;s)|| = k-1
. | . | | . | . | . . . . . 32. s ~ (firstn(||s||-1;s) @ [(L[c]-1)])
. | . | | . | . | . . . . . ⊢  G(map(f o f@0;firstn(||s||-1;s))
. | . | | . | . | . . . . . |   @ [(n-1)])
. | . | | . | . | . . . . . |  =
. | . | | . | . | . . . . . |  c  by Id
. | . | | . | . | . . . . . |
. | . | | . | . | . . . . . 1. r : ℕ
. | . | | . | . | . . . . . 2. k : ℕ
. | . | | . | . | . . . . . 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | . . . . . 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | . . . . . 5. 2≤k
. | . | | . | . | . . . . . 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | . . . . . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | . . . . . 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | . . . . . 9. n : ℕ
. | . | | . | . | . . . . . 10. r+1≤n
. | . | | . | . | . . . . . 11. G :
. | . | | . | . | . . . . . |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | . . . . . |    | ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . . |      & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . . . . . |   →ℕ||L||
. | . | | . | . | . . . . . 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | . . . . . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | . . . . . 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | . . . . . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | . . . . . |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . | . . . . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . . . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . . . . . |   ⇒
```

```
. | . | | . | . | . . . . |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | . . . . 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | . . . . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | . . . . 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | . . . . |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | . . . . |      | ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . |        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . . . . |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . . . . 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . . . . 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | . . . . 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | . . . . 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | . . . . |   ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . . . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . . . |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | . . . . 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | . . . . 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | . . . . 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . . . . 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | . . . . 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | . . . . 29. ¬i<k-1
. | . | | . | . | . . . . 30. firstn(||s||-1;s) ∈ ℕ(L[c]-1) List
. | . | | . | . | . . . . 31. ||firstn(||s||-1;s)|| = k-1
. | . | | . | . | . . . . 32. s ~ (firstn(||s||-1;s) @ [(L[c]-1)])
. | . | | . | . | . . . . ⊢  G(map(f o f@0;firstn(||s||-1;s))
. | . | | . | . | . . . . |   @ [(n-1)])
. | . | | . | . | . . . . |  =
. | . | | . | . | . . . . |  c
. | . | | . | . | . . . . | by (RWO "map-map<" 0) THEN (BackThru 15)
. | . | | . | . | . . . . |    THEN
. | . | | . | . | . . . . |    (Try (Complete Auto))
. | . | | . | . | . . . . |
. | . | | . | . | . . . . |\
. | . | | . | . | . . . . | 1. r : ℕ
. | . | | . | . | . . . . | 2. k : ℕ
. | . | | . | . | . . . . | 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | . . . . | 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | . . . . | 5. 2≤k
. | . | | . | . | . . . . | 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | . . . . | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | . . . . | 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | . . . . | 9. n : ℕ
. | . | | . | . | . . . . | 10. r+1≤n
. | . | | . | . | . . . . | 11. G :
. | . | | . | . | . . . . |     {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | . . . . |      | ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . |        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . . . . |     →ℕ||L||
. | . | | . | . | . . . . | 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | . . . . | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | . . . . | 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | . . . . | 15. ∀s:ℕR[c] List.
```

```
. | . | | . | . | . . . . . |     ||s|| = k-1
. | . | | . | . | . . . . . |     ⇒
. | . | | . | . | . . . . . |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . . . . . |     ⇒
. | . | | . | . | . . . . . |     G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | . . . . . | 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | . . . . . | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | . . . . . | 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | . . . . . |     ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | . . . . . |        | ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . . |          & (∀x,y:ℕ||s||.
. | . | | . | . | . . . . . |              x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . . . . . |       →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . . . . . | 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . . . . . | 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | . . . . . | 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | . . . . . | 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | . . . . . |     ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . . |     ⇒
. | . | | . | . | . . . . . |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . . . . . |     ⇒
. | . | | . | . | . . . . . |     G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | . . . . . | 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | . . . . . | 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | . . . . . | 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . . | 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . . . . . | 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | . . . . . | 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | . . . . . | 29. ¬i<k-1
. | . | | . | . | . . . . . | 30. firstn(||s||-1;s) ∈ ℕ(L[c]-1) List
. | . | | . | . | . . . . . | 31. ||firstn(||s||-1;s)|| = k-1
. | . | | . | . | . . . . . | 32. s ~ (firstn(||s||-1;s) @ [(L[c]-1)])
. | . | | . | . | . . . . . | ⊢  ||map(f@0;firstn(||s||-1;s))|| = k-1
. | . | | . | . | . . . . . |   by RWO
. | . | | . | . | . . . . . |      Thm* ∀f:(A→B), as:A List.
. | . | | . | . | . . . . . |            ||map(f;as)|| = ||as|| ∈ ℤ
. | . | | . | . | . . . . . |      {map_length}
. | . | | . | . | . . . . . |      0
. | . | | . | . | . . . . . |
. | . | | . | . | . . . . . .\
. | . | | . | . | . . . . . . 1. r : ℕ
. | . | | . | . | . . . . . . 2. k : ℕ
. | . | | . | . | . . . . . . 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | . . . . . . 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | . . . . . . 5. 2≤k
. | . | | . | . | . . . . . . 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | . . . . . . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | . . . . . . 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | . . . . . . 9. n : ℕ
. | . | | . | . | . . . . . . 10. r+1≤n
. | . | | . | . | . . . . . . 11. G :
. | . | | . | . | . . . . . . |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | . . . . . . |     | ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . . . |       & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . . . . . . |   →ℕ||L||
```

```
. | . | | . | . | . . . . . 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | . . . . . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | . . . . . 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | . . . . . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | . . . . . |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . | . . . . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . . . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . . . . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . . . . |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | . . . . . 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | . . . . . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | . . . . . 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | . . . . . |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | . . . . . |      | ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . . |        & (∀x,y:ℕ||s||.
. | . | | . | . | . . . . . |            x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . . . . . |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . . . . . 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . . . . . 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | . . . . . 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | . . . . . 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | . . . . . |   ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . . . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . . . . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . . . . |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | . . . . . 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | . . . . . 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | . . . . . 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . . 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . . . . . 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | . . . . . 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | . . . . . 29. ¬i<k-1
. | . | | . | . | . . . . . 30. firstn(||s||-1;s) ∈ ℕ(L[c]-1) List
. | . | | . | . | . . . . . 31. ||firstn(||s||-1;s)|| = k-1
. | . | | . | . | . . . . . 32. s ∼ (firstn(||s||-1;s) @ [(L[c]-1)])
. | . | | . | . | . . . . . ⊢  ∀x,y:ℕ||map(f@0;firstn(||s||-1;s))||.
. | . | | . | . | . . . . . |  x<y
. | . | | . | . | . . . . . |  ⇒
. | . | | . | . | . . . . . |  map(f@0;firstn(||s||
. | . | | . | . | . . . . . |  -1;s))[x]<map(f@0;firstn(||s||-1;s))[y]
. | . | | . | . | . . . . . | by (RWO
. | . | | . | . | . . . . . |     Thm* ∀f:(A→B), as:A List.
. | . | | . | . | . . . . . |          ||map(f;as)|| = ||as|| ∈ ℤ
. | . | | . | . | . . . . . |     {map_length}
. | . | | . | . | . . . . . |     0)
. | . | | . | . | . . . . . |    THEN
. | . | | . | . | . . . . . |    (RWO
. | . | | . | . | . . . . . |     Thm* ∀f:(A→B), as:A List
. | . | | . | . | . . . . . |          , n:ℕ||as||.
. | . | | . | . | . . . . . |          map(f;as)[n] = f(as[n])
. | . | | . | . | . . . . . |     {map_select}
. | . | | . | . | . . . . . |     0)
. | . | | . | . | . . . . . |
. | . | | . | . | . . . . . 1. r : ℕ
```

```
. | . | | . | . | . . . . . . 2. k : ℕ
. | . | | . | . | . . . . . . 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | . . . . . . 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | . . . . . . 5. 2≤k
. | . | | . | . | . . . . . . 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | . . . . . . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | . . . . . . 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | . . . . . . 9. n : ℕ
. | . | | . | . | . . . . . . 10. r+1≤n
. | . | | . | . | . . . . . . 11. G :
. | . | | . | . | . . . . . . |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | . . . . . . |    | ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . . . |      & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . . . . . . |   →ℕ||L||
. | . | | . | . | . . . . . . 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | . . . . . . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | . . . . . . 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | . . . . . . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | . . . . . . |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . | . . . . . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . . . . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . . . . . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . . . . . |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | . . . . . . 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | . . . . . . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | . . . . . . 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | . . . . . . |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | . . . . . . |      | ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . . . |        & (∀x,y:ℕ||s||.
. | . | | . | . | . . . . . . |            x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . . . . . . |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . . . . . . 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . . . . . . 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | . . . . . . 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | . . . . . . 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | . . . . . . |   ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . . . . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . . . . . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . . . . . |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | . . . . . . 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | . . . . . . 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | . . . . . . 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . . . 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . . . . . . 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | . . . . . . 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | . . . . . . 29. ¬i<k-1
. | . | | . | . | . . . . . . 30. firstn(||s||-1;s) ∈ ℕ(L[c]-1) List
. | . | | . | . | . . . . . . 31. ||firstn(||s||-1;s)|| = k-1
. | . | | . | . | . . . . . . 32. s ~ (firstn(||s||-1;s) @ [(L[c]-1)])
. | . | | . | . | . . . . . . 33. x : ℕ||firstn(||s||-1;s)||
. | . | | . | . | . . . . . . 34. y : ℕ||firstn(||s||-1;s)||
. | . | | . | . | . . . . . . 35. x<y
. | . | | . | . | . . . . . . ⊢  f@0(firstn(||s||-1;s)[x])<f@0
. | . | | . | . | . . . . . . |                              (firstn(||s||
```

```
. | . | | . | . | . . . . . . |                              -1;s)[y])
. | . | | . | . | . . . . . . | by AllHyps
. | . | | . | . | . . . . . . |    (λh.
. | . | | . | . | . . . . . . |     (FwdThru
. | . | | . | . | . . . . . . |      Thm* ∀k:ℕ, f:(ℕk→ℤ).
. | . | | . | . | . . . . . . |           increasing(f;k)
. | . | | . | . | . . . . . . |           ⇒
. | . | | . | . | . . . . . . |           (∀x,y:ℕk. x<y ⇒ f(x)<f(y))
. | . | | . | . | . . . . . . |      {increasing_implies}
. | . | | . | . | . . . . . . |      [h])
. | . | | . | . | . . . . . . |     THEN
. | . | | . | . | . . . . . . |     (BackThru -1))
. | . | | . | . | . . . . . . |
. | . | | . | . | . . . . . . 1. r : ℕ
. | . | | . | . | . . . . . . 2. k : ℕ
. | . | | . | . | . . . . . . 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | . . . . . . 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | . . . . . . 5. 2≤k
. | . | | . | . | . . . . . . 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | . . . . . . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | . . . . . . 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | . . . . . . 9. n : ℕ
. | . | | . | . | . . . . . . 10. r+1≤n
. | . | | . | . | . . . . . . 11. G :
. | . | | . | . | . . . . . . |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | . . . . . . |    | ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . . . |      & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . . . . . . |   →ℕ||L||
. | . | | . | . | . . . . . . 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | . . . . . . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | . . . . . . 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | . . . . . . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | . . . . . . |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . | . . . . . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . . . . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . . . . . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . . . . . |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | . . . . . . 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | . . . . . . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | . . . . . . 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | . . . . . . |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | . . . . . . |      | ||s|| = k

. | . | | . | . | . . . . . . |        & (∀x,y:ℕ||s||.
. | . | | . | . | . . . . . . |           x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . . . . . . |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . . . . . . 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . . . . . . 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | . . . . . . 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | . . . . . . 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | . . . . . . |   ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . . . . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . . . . . . |   ⇒
. | . | | . | . | . . . . . . |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | . . . . . . 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
```

```
. | . | | . | . | . . . . . 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | . . . . . 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . . 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . . . . . 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | . . . . . 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | . . . . . 29. ¬i<k-1
. | . | | . | . | . . . . . 30. firstn(||s||-1;s) ∈ ℕ(L[c]-1) List
. | . | | . | . | . . . . . 31. ||firstn(||s||-1;s)|| = k-1
. | . | | . | . | . . . . . 32. s ∼ (firstn(||s||-1;s) @ [(L[c]-1)])
. | . | | . | . | . . . . . 33. x : ℕ||firstn(||s||-1;s)||
. | . | | . | . | . . . . . 34. y : ℕ||firstn(||s||-1;s)||
. | . | | . | . | . . . . . 35. x<y
. | . | | . | . | . . . . . 36. ∀x,y:ℕ(L[c]-1). x<y ⇒ f@0(x)<f@0(y)
. | . | | . | . | . . . . . ⊢  firstn(||s||-1;s)[x]<firstn(||s||
. | . | | . | . | . . . . . |  -1;s)[y]  by FwdThru -11 [-2]
. | . | | . | . | . . . . . |
. | . | | . | . | . . . . . 1. r : ℕ
. | . | | . | . | . . . . . 2. k : ℕ
. | . | | . | . | . . . . . 3. L : ℕ List
. | . | | . | . | . . . . . 4. R : ℕ List
. | . | | . | . | . . . . . 5. 2≤k
. | . | | . | . | . . . . . 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . | . . . . . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . | . . . . . 8. r->R^k-1
. | . | | . | . | . . . . . 9. n : ℕ
. | . | | . | . | . . . . . 10. r+1≤n
. | . | | . | . | . . . . . 11. G :
. | . | | . | . | . . . . .     {s:(ℕn List)
. | . | | . | . | . . . . .      | ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . .        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . . . . .     →ℕ||L||
. | . | | . | . | . . . . . 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . | . . . . . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . | . . . . . 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . | . . . . . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . | . . . . .     ||s|| = k-1
. | . | | . | . | . . . . .     ⇒
. | . | | . | . | . . . . .     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . | . . . . .     ⇒
. | . | | . | . | . . . . .     G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . | . . . . . 16. 0<L[c]
. | . | | . | . | . . . . . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . | . . . . . 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . | . . . . .     ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . | . . . . .        | ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . .          & (∀x,y:ℕ||s||.
. | . | | . | . | . . . . .              x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . | . . . . .       →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . . . . . 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . | . . . . . 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . | . . . . . 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . | . . . . . 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . | . . . . .     ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . .     ⇒
. | . | | . | . | . . . . .     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
```

```
. | . | | . | . | . . . . .      ⇒
. | . | | . | . | . . . . .      G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . | . . . . . 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . | . . . . . 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . | . . . . . 25. ||s|| = k
. | . | | . | . | . . . . . 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . . . . . 27. i : ℕ||s||
. | . | | . | . | . . . . . 28. s[i] = L[c]-1
. | . | | . | . | . . . . . 29. ¬i<k-1
. | . | | . | . | . . . . . 30. firstn(||s||-1;s) ∈ ℕ(L[c]-1) List
. | . | | . | . | . . . . . 31. ||firstn(||s||-1;s)|| = k-1
. | . | | . | . | . . . . . 32. s ~ (firstn(||s||-1;s) @ [(L[c]-1)])
. | . | | . | . | . . . . . 33. x : ℕ||firstn(||s||-1;s)||
. | . | | . | . | . . . . . 34. y : ℕ||firstn(||s||-1;s)||
. | . | | . | . | . . . . . 35. x<y
. | . | | . | . | . . . . . 36. ∀x,y:ℕ(L[c]-1). x<y ⇒ f@0(x)<f@0(y)
. | . | | . | . | . . . . . 37. s[x]<s[y]
. | . | | . | . | . . . . . ⊢  firstn(||s||-1;s)[x]<firstn(||s||
. | . | | . | . | . . . . .     -1;s)[y]
. | . | | . | . | . . . . .    by RWO
. | . | | . | . | . . . . .       Thm* ∀as:T List, n:{0...||as||}
. | . | | . | . | . . . . .             , i:ℕn. firstn(n;as)[i] = as[i]
. | . | | . | . | . . . . .       {select_firstn}
. | . | | . | . | . . . . .       0
. | . | | . | . |
. | . | | . | . . .\
. | . | | . | . . . 1. r : ℕ
. | . | | . | . . . 2. k : ℕ
. | . | | . | . . . 3. L : ℕ List
. | . | | . | . . . 4. R : ℕ List
. | . | | . | . . . 5. 2≤k
. | . | | . | . . . 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . . . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . . . 8. r->R^k-1
. | . | | . | . . . 9. n : ℕ
. | . | | . | . . . 10. r+1≤n
. | . | | . | . . . 11. G :
. | . | | . | . . . |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . . . |    | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . . . |   →ℕ||L||
. | . | | . | . . . 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . . . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . . . 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . . . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . . . |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . . . |   ⇒
. | . | | . | . . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . . . |   ⇒
. | . | | . | . . . |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . . . 16. 0<L[c]
. | . | | . | . . . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . . . 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . . . |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . . . |      | ||s|| = k
. | . | | . | . . . |        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
```

```
. | . | | . | . . |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . . 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . . 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . . 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . . 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . . |   ||s|| = k
. | . | | . | . . |   ⇒
. | . | | . | . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . . |   ⇒
. | . | | . | . . |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . . 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . . 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . . 25. ||s|| = k
. | . | | . | . . 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . . 27. ¬(∃i:ℕ||s||. s[i] = L[c]-1)
. | . | | . | . . ⊢  G(map(f o f@0[L[c]-1:=n-1];s)) = c
. | . | | . | . . | by (InstHyp [s] -6) THEN (Try (Complete Auto))
. | . | | . | . . |
. | . | | . | . . |\
. | . | | . | . . | .....wf .....
. | . | | . | . . | 1. r : ℕ
. | . | | . | . . | 2. k : ℕ
. | . | | . | . . | 3. L : ℕ List
. | . | | . | . . | 4. R : ℕ List
. | . | | . | . . | 5. 2≤k
. | . | | . | . . | 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . . | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . . | 8. r->R^k-1
. | . | | . | . . | 9. n : ℕ
. | . | | . | . . | 10. r+1≤n
. | . | | . | . . | 11. G :
. | . | | . | . . | |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . . | |    | ||s|| = k
. | . | | . | . . | |      & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . . | |   →ℕ||L||
. | . | | . | . . | 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . . | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . . | 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . . | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . . | |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . . | |   ⇒
. | . | | . | . . | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . . | |   ⇒
. | . | | . | . . | |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . . | 16. 0<L[c]
. | . | | . | . . | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . . | 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . . | |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . . | |      | ||s|| = k
. | . | | . | . . | |        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . . | |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . . | 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . . | 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . . | 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . . | 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
```

```
. | . | | . | . . | |   ||s|| = k
. | . | | . | . . | |   ⇒
. | . | | . | . . | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . . | |   ⇒
. | . | | . | . . | |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . . | 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . . | 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . . | 25. ||s|| = k
. | . | | . | . . | 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . . | 27. ¬(∃i:ℕ||s||. s[i] = L[c]-1)
. | . | | . | . . | ⊢  s ∈ ℕ(L[c]-1) List
. | . | | . | . . | | by ((MoveToConcl -1)
. | . | | . | . . | |     THEN
. | . | | . | . . | |     (RepeatFor 2 (Thin -1))
. | . | | . | . . | |     THEN
. | . | | . | . . | |     (MoveToConcl -1)
. | . | | . | . . | |     THEN
. | . | | . | . . | |     (GenConcl (L[c] = a)))
. | . | | . | . . | |    THENA
. | . | | . | . . | |    ((Try (Complete Auto)) THEN Analyze)
. | . | | . | . . | |
. | . | | . | . . | 1. r : ℕ
. | . | | . | . . | 2. k : ℕ
. | . | | . | . . | 3. L : ℕ List
. | . | | . | . . | 4. R : ℕ List
. | . | | . | . . | 5. 2≤k
. | . | | . | . . | 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . . | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . . | 8. r->R^k-1
. | . | | . | . . | 9. n : ℕ
. | . | | . | . . | 10. r+1≤n
. | . | | . | . . | 11. G :
. | . | | . | . . | |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . . | |    | ||s|| = k
. | . | | . | . . | |      & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . . | |   →ℕ||L||
. | . | | . | . . | 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . . | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . . | 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . . | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . . | |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . . | |   ⇒
. | . | | . | . . | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . . | |   ⇒
. | . | | . | . . | |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . . | 16. 0<L[c]
. | . | | . | . . | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . . | 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . . | |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . . | |      | ||s|| = k
. | . | | . | . . | |        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . . | |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . . | 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . . | 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . . | 21. increasing(f@0;L[c]-1)
```

```
. | . | | . | . . | 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . . | |   ||s|| = k
. | . | | . | . . | |   ⇒
. | . | | . | . . | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . . | |   ⇒
. | . | | . | . . | |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . . | 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . . | 24. a : ℕ+
. | . | | . | . . | 25. L[c] = a
. | . | | . | . . | ⊢  ∀s:ℕa List.
. | . | | . | . . | |  ¬(∃i:ℕ||s||. s[i] = a-1) ⇒ s ∈ ℕ(a-1) List
. | . | | . | . . | | by (All Thin) THEN InductionOnList
. | . | | . | . . | |    THEN
. | . | | . | . . | |    (Reduce 0)
. | . | | . | . . | |
. | . | | . | . . | |\
. | . | | . | . . | | 1. a : ℕ+
. | . | | . | . . | | 2. ℕa List
. | . | | . | . . | | 3. u : ℕa
. | . | | . | . . | | 4. v : ℕa List
. | . | | . | . . | | 5. ¬(∃i:ℕ||v||. v[i] = a-1) ⇒ v ∈ ℕ(a-1) List
. | . | | . | . . | | 6. ¬(∃i:ℕ(||v||+1). [u / v][i] = a-1)
. | . | | . | . . | | ⊢  u<a-1
. | . | | . | . . | |   by SupposeNot THEN (Analyze -2)
. | . | | . | . . | |      THEN
. | . | | . | . . | |      (InstConcl [0])
. | . | | . | . . | |      THEN
. | . | | . | . . | |      (Reduce 0)
. | . | | . | . . | |
. | . | | . | . . | |\
. | . | | . | . . | | .....subterm .....
. | . | | . | . . | | 1. a : ℕ+
. | . | | . | . . | | 2. ℕa List
. | . | | . | . . | | 3. u : ℕa
. | . | | . | . . | | 4. v : ℕa List
. | . | | . | . . | | 5. ¬(∃i:ℕ||v||. v[i] = a-1) ⇒ v ∈ ℕ(a-1) List
. | . | | . | . . | | 6. ¬(∃i:ℕ(||v||+1). [u / v][i] = a-1)
. | . | | . | . . | | ⊢  v ∈ ℕ(a-1) List
. | . | | . | . . | | | by (BackThru -2) THEN (ParallelOp -1)
. | . | | . | . . | | |    THEN
. | . | | . | . . | | |    ExRepD
. | . | | . | . . | | |    THEN
. | . | | . | . . | | |    (InstConcl [i+1])
. | . | | . | . . | | |
. | . | | . | . . | | 1. a : ℕ+
. | . | | . | . . | | 2. ℕa List
. | . | | . | . . | | 3. u : ℕa
. | . | | . | . . | | 4. v : ℕa List
. | . | | . | . . | | 5. ¬(∃i:ℕ||v||. v[i] = a-1) ⇒ v ∈ ℕ(a-1) List
. | . | | . | . . | | 6. i : ℕ||v||
. | . | | . | . . | | 7. v[i] = a-1
. | . | | . | . . | | ⊢  [u / v][(i+1)] = a-1  by Obvious
. | . | | . | . . | |
. | . | | . | . . | .\
. | . | | . | . . | . 1. a : ℕ+
```

```
. | . | | . | . . . | . 2. ℕa List
. | . | | . | . . . | . 3. u : ℕa
. | . | | . | . . . | . 4. v : ℕa List
. | . | | . | . . . | . 5. ¬(∃i:ℕ||v||. v[i] = a-1) ⇒ v ∈ ℕ(a-1) List
. | . | | . | . . . | . 6. i : ℕ(||v||+1)
. | . | | . | . . . | . ⊢  i<||[u / v]||  by Reduce 0
. | . | | . | . . . |
. | . | | . | . . . .\
. | . | | . | . . . . 1. r : ℕ
. | . | | . | . . . . 2. k : ℕ
. | . | | . | . . . . 3. L : ℕ List
. | . | | . | . . . . 4. R : ℕ List
. | . | | . | . . . . 5. 2≤k
. | . | | . | . . . . 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . . . . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . . . . 8. r->R^k-1
. | . | | . | . . . . 9. n : ℕ
. | . | | . | . . . . 10. r+1≤n
. | . | | . | . . . . 11. G :
. | . | | . | . . . . |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . . . . |    | ||s|| = k
. | . | | . | . . . . |      & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . . . . |   →ℕ||L||
. | . | | . | . . . . 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . . . . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . . . . 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . . . . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . . . . |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . . . . |   ⇒
. | . | | . | . . . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . . . . |   ⇒
. | . | | . | . . . . |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . . . . 16. 0<L[c]
. | . | | . | . . . . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . . . . 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . . . . |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . . . . |      | ||s|| = k
. | . | | . | . . . . |        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . . . . |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . . . . 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . . . . 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . . . . 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . . . . 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . . . . |   ||s|| = k
. | . | | . | . . . . |   ⇒
. | . | | . | . . . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . . . . |   ⇒
. | . | | . | . . . . |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . . . . 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . . . . 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . . . . 25. ||s|| = k
. | . | | . | . . . . 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . . . . 27. ¬(∃i:ℕ||s||. s[i] = L[c]-1)
. | . | | . | . . . . 28. G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . . . . ⊢  G(map(f o f@0[L[c]-1:=n-1];s)) = c
```

```
. | . | | . | . . . | by (NthHypSq -1) THEN Analyze THEN Analyze
. | . | | . | . . . |    THEN
. | . | | . | . . . |    (Try (Complete Auto))
. | . | | . | . . . |
. | . | | . | . . . 1. r : ℕ
. | . | | . | . . . 2. k : ℕ
. | . | | . | . . . 3. L : ℕ List
. | . | | . | . . . 4. R : ℕ List
. | . | | . | . . . 5. 2≤k
. | . | | . | . . . 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . . . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . . . 8. r->R^k-1
. | . | | . | . . . 9. n : ℕ
. | . | | . | . . . 10. r+1≤n
. | . | | . | . . . 11. G :
. | . | | . | . . . |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . . . |    | ||s|| = k
. | . | | . | . . . |      & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . . . |   →ℕ||L||
. | . | | . | . . . 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . . . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . . . 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . . . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . . . |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . . . |   ⇒
. | . | | . | . . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . . . |   ⇒
. | . | | . | . . . |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . . . 16. 0<L[c]
. | . | | . | . . . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . . . 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . . . |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . . . |       | ||s|| = k
. | . | | . | . . . |         & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . . . |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . . . 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . . . 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . . . 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . . . 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . . . |   ||s|| = k
. | . | | . | . . . |   ⇒
. | . | | . | . . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . . . |   ⇒
. | . | | . | . . . |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . . . 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . . . 24. s : ℕL[c] List
. | . | | . | . . . 25. ||s|| = k
. | . | | . | . . . 26. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | | . | . . . 27. ¬(∃i:ℕ||s||. s[i] = L[c]-1)
. | . | | . | . . . 28. G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . . . ⊢  map(f o f@0[L[c]-1:=n-1];s) ~ map(f;map(f@0;s))
. | . | | . | . . . | by ((Thin -1) THEN (MoveToConcl -1)
. | . | | . | . . . |     THEN
. | . | | . | . . . |     (RepeatFor 2 (Thin -1))
. | . | | . | . . . |     THEN
```

```
. | . | | . | . . . |     (MoveToConcl -1)
. | . | | . | . . . |     THEN
. | . | | . | . . . |     (GenConcl (L[c] = a)))
. | . | | . | . . . |    THENA
. | . | | . | . . . |    ((Try (Complete Auto)) THEN Analyze)
. | . | | . | . . . |
. | . | | . | . . . 1. r : ℕ
. | . | | . | . . . 2. k : ℕ
. | . | | . | . . . 3. L : ℕ List
. | . | | . | . . . 4. R : ℕ List
. | . | | . | . . . 5. 2≤k
. | . | | . | . . . 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . . . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . . . 8. r->R^k-1
. | . | | . | . . . 9. n : ℕ
. | . | | . | . . . 10. r+1≤n
. | . | | . | . . . 11. G :
. | . | | . | . . . |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . . . |    | ||s|| = k
. | . | | . | . . . |      & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . . . |   →ℕ||L||
. | . | | . | . . . 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . . . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . . . 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . . . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . . . |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . . . |   ⇒
. | . | | . | . . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . . . |   ⇒
. | . | | . | . . . |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . . . 16. 0<L[c]
. | . | | . | . . . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . . . 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . . . |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . . . |      | ||s|| = k
. | . | | . | . . . |        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . . . |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . . . 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . . . 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . . . 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . . . 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . . . |   ||s|| = k
. | . | | . | . . . |   ⇒
. | . | | . | . . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . . . |   ⇒
. | . | | . | . . . |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . . . 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . . . 24. a : ℕ+
. | . | | . | . . . 25. L[c] = a
. | . | | . | . . . ⊢  ∀s:ℕa List.
. | . | | . | . . . |  ¬(∃i:ℕ||s||. s[i] = a-1)
. | . | | . | . . . |  ⇒
. | . | | . | . . . |  (map(f o f@0[a-1:=n-1];s) ~ map(f;map(f@0;s)))
. | . | | . | . . . | by InductionOnList THEN (Reduce 0)
. | . | | . | . . . |    THEN
```

```
. | . | | . | . . . |    (Analyze 0)
. | . | | . | . . . |    THEN
. | . | | . | . . . |    Analyze
. | . | | . | . . . |
. | . | | . | . . . |\
. | . | | . | . . . | 1. r : ℕ
. | . | | . | . . . | 2. k : ℕ
. | . | | . | . . . | 3. L : ℕ List
. | . | | . | . . . | 4. R : ℕ List
. | . | | . | . . . | 5. 2≤k
. | . | | . | . . . | 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . . . | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . . . | 8. r->R^k-1
. | . | | . | . . . | 9. n : ℕ
. | . | | . | . . . | 10. r+1≤n
. | . | | . | . . . | 11. G :
. | . | | . | . . . | |   {s:(ℕn List)
. | . | | . | . . . | |    | ||s|| = k
. | . | | . | . . . | |      & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . . . | |   →ℕ||L||
. | . | | . | . . . | 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . . . | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . . . | 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . . . | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . . . | |   ||s|| = k-1
. | . | | . | . . . | |   ⇒
. | . | | . | . . . | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . . . | |   ⇒
. | . | | . | . . . | |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . . . | 16. 0<L[c]
. | . | | . | . . . | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . . . | 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . . . | |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . . . | |      | ||s|| = k
. | . | | . | . . . | |        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . . . | |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . . . | 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . . . | 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . . . | 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . . . | 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . . . | |   ||s|| = k
. | . | | . | . . . | |   ⇒
. | . | | . | . . . | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . . . | |   ⇒
. | . | | . | . . . | |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . . . | 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . . . | 24. a : ℕ+

. | . | | . | . . . | 25. L[c] = a
. | . | | . | . . . | 26. ℕa List
. | . | | . | . . . | 27. u : ℕa
. | . | | . | . . . | 28. v : ℕa List
. | . | | . | . . . | 29. ¬(∃i:ℕ||v||. v[i] = a-1)
. | . | | . | . . . | |   ⇒
. | . | | . | . . . | |   (map(f o f@0[a-1:=n
. | . | | . | . . . | |    -1];v) ∼ map(f;map(f@0;v)))
```

```
. | . | | . | . . . . | 30. ¬(∃i:ℕ(||v||+1). [u / v][i] = a-1)
. | . | | . | . . . . | ⊢  (f o f@0[a-1:=n-1](u)) ∼ (f(f@0(u)))
. | . | | . | . . . . | | by (Unfold ‘fappend‘ 0) THEN (Reduce 0)
. | . | | . | . . . . | |    THEN
. | . | | . | . . . . | |    SplitOnConclITE
. | . | | . | . . . . | |
. | . | | . | . . . . | 1. r : ℕ
. | . | | . | . . . . | 2. k : ℕ
. | . | | . | . . . . | 3. L : ℕ List
. | . | | . | . . . . | 4. R : ℕ List
. | . | | . | . . . . | 5. 2≤k
. | . | | . | . . . . | 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . . . . | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . . . . | 8. r->R^k-1
. | . | | . | . . . . | 9. n : ℕ
. | . | | . | . . . . | 10. r+1≤n
. | . | | . | . . . . | 11. G :
. | . | | . | . . . . |     {s:(ℕn List)
. | . | | . | . . . . |      | ||s|| = k
. | . | | . | . . . . |        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . . . . |     →ℕ||L||
. | . | | . | . . . . | 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . . . . | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . . . . | 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . . . . | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . . . . |     ||s|| = k-1
. | . | | . | . . . . |     ⇒
. | . | | . | . . . . |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . . . . |     ⇒
. | . | | . | . . . . |     G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . . . . | 16. 0<L[c]
. | . | | . | . . . . | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . . . . | 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . . . . |     ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . . . . |        | ||s|| = k
. | . | | . | . . . . |          & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . . . . |       →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . . . . | 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . . . . | 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . . . . | 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . . . . | 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . . . . |     ||s|| = k
. | . | | . | . . . . |     ⇒
. | . | | . | . . . . |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . . . . |     ⇒
. | . | | . | . . . . |     G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . . . . | 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . . . . | 24. a : ℕ+
. | . | | . | . . . . | 25. L[c] = a
. | . | | . | . . . . | 26. ℕa List
. | . | | . | . . . . | 27. u : ℕa
. | . | | . | . . . . | 28. v : ℕa List
. | . | | . | . . . . | 29. ¬(∃i:ℕ||v||. v[i] = a-1)
. | . | | . | . . . . |     ⇒
. | . | | . | . . . . |     (map(f o f@0[a-1:=n
```

```
. | . | | . | . . . |      -1];v) ∼ map(f;map(f@0;v)))
. | . | | . | . . . | 30. ¬(∃i:ℕ(||v||+1). [u / v][i] = a-1)
. | . | | . | . . . | 31. u = a-1
. | . | | . | . . . | ⊢  n-1 = f(f@0(u))
. | . | | . | . . . |   by (Analyze -2) THEN (InstConcl [0])
. | . | | . | . . . |      THEN
. | . | | . | . . . |      (Reduce 0)
. | . | | . | . . . |
. | . | | . | . . . .\
. | . | | . | . . . . 1. r : ℕ
. | . | | . | . . . . 2. k : ℕ
. | . | | . | . . . . 3. L : ℕ List
. | . | | . | . . . . 4. R : ℕ List
. | . | | . | . . . . 5. 2≤k
. | . | | . | . . . . 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . | . . . . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . | . . . . 8. r->R^k-1
. | . | | . | . . . . 9. n : ℕ
. | . | | . | . . . . 10. r+1≤n
. | . | | . | . . . . 11. G :
. | . | | . | . . . .     {s:(ℕn List)
. | . | | . | . . . .      | ||s|| = k
. | . | | . | . . . .        & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . . . .     →ℕ||L||
. | . | | . | . . . . 12. c : ℕ||R||
. | . | | . | . . . . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . | . . . . 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . | . . . . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . | . . . .     ||s|| = k-1
. | . | | . | . . . .     ⇒
. | . | | . | . . . .     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . . . .     ⇒
. | . | | . | . . . .     G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . | . . . . 16. 0<L[c]
. | . | | . | . . . . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . | . . . . 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | | . | . . . .     ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . | . . . .         | ||s|| = k
. | . | | . | . . . .           & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . | . . . .        →ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . . . . 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . | . . . . 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . | . . . . 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . | . . . . 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . | . . . .     ||s|| = k
. | . | | . | . . . .     ⇒
. | . | | . | . . . .     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . | . . . .     ⇒
. | . | | . | . . . .     G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . | . . . . 23. increasing(f o f@0[L[c]-1:=n-1];L[c])
. | . | | . | . . . . 24. a : ℕ+
. | . | | . | . . . . 25. L[c] = a
. | . | | . | . . . . 26. ℕa List
. | . | | . | . . . . 27. u : ℕa
. | . | | . | . . . . 28. v : ℕa List
```

```
. | . | | . | . . . . 29. ¬(∃i:ℕ||v||. v[i] = a-1)
. | . | | . | . . . .     ⇒
. | . | | . | . . . .     (map(f o f@0[a-1:=n
. | . | | . | . . . .      -1];v) ~ map(f;map(f@0;v)))
. | . | | . | . . . . 30. ¬(∃i:ℕ(||v||+1). [u / v][i] = a-1)
. | . | | . | . . . . ⊢  map(f o f@0[a-1:=n-1];v) ~ map(f;map(f@0;v))
. | . | | . | . . . .   by (Analyze -2) THEN (Try Trivial)
. | . | | . | . . . .      THEN
. | . | | . | . . . .      (ParallelOp -1)
. | . | | . | . . . .      THEN
. | . | | . | . . . .      ExRepD
. | . | | . | . . . .      THEN
. | . | | . | . . . .      (InstConcl [i+1])
. | . | | . | . . . .      THEN
. | . | | . | . . . .      Obvious
. | . | | . |
. | . | | . .\
. | . | | . . .....wf .....
. | . | | . . 1. r : ℕ
. | . | | . . 2. k : ℕ
. | . | | . . 3. L : ℕ List
. | . | | . . 4. R : ℕ List
. | . | | . . 5. 2≤k
. | . | | . . 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . . 8. r->R^k-1
. | . | | . . 9. n : ℕ
. | . | | . . 10. r+1≤n
. | . | | . . 11. G :
. | . | | . . |   {s:(ℕn List)
. | . | | . . |    | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . . |   →ℕ||L||
. | . | | . . 12. c : ℕ||R||
. | . | | . . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . . 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . . |   ||s|| = k-1
. | . | | . . |   ⇒
. | . | | . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . . |   ⇒
. | . | | . . |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . . 16. 0<L[c]
. | . | | . . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . . 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | | . . |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . . |      | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . . |     →ℕ||L[c--]||
. | . | | . . 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . . 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . . 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . . 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . . |   ||s|| = k
. | . | | . . |   ⇒
. | . | | . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . . |   ⇒
```

```
. | . | | . . |   G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . . 23. f1 : ℕL[c]→ℕn
. | . | | . . ⊢  (increasing(f1;L[c])
. | . | | . . |   & (∀s:ℕL[c] List.
. | . | | . . |      ||s|| = k
. | . | | . . |      ⇒
. | . | | . . |      (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . . |      ⇒
. | . | | . . |      G(map(f1;s)) = c))
. | . | | . . |  ∈ Prop  by Auto
. | . | | . . |
. | . | | . . .....subterm .....
. | . | | . . 1. r : ℕ
. | . | | . . 2. k : ℕ
. | . | | . . 3. L : ℕ List
. | . | | . . 4. R : ℕ List
. | . | | . . 5. 2≤k
. | . | | . . 6. ||R|| = ||L||
. | . | | . . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | | . . 8. r->R^k-1
. | . | | . . 9. n : ℕ
. | . | | . . 10. r+1≤n
. | . | | . . 11. G :
. | . | | . .     {s:(ℕn List)
. | . | | . .      | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . .     →ℕ||L||
. | . | | . . 12. c : ℕ||R||
. | . | | . . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | | . . 14. increasing(f;R[c])
. | . | | . . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | | . .     ||s|| = k-1
. | . | | . .     ⇒
. | . | | . .     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . .     ⇒
. | . | | . .     G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | | . . 16. 0<L[c]
. | . | | . . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | | . . 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | | . .     ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | | . .        | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . .       →ℕ||L[c--]||
. | . | | . . 19. ℕ||L[c--]||
. | . | | . . 20. f@0 : ℕ(L[c]-1)→ℕR[c]
. | . | | . . 21. increasing(f@0;L[c]-1)
. | . | | . . 22. ∀s:ℕ(L[c]-1) List.
. | . | | . .     ||s|| = k
. | . | | . .     ⇒
. | . | | . .     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | | . .     ⇒
. | . | | . .     G(map(f;map(f@0;s))) = c
. | . | | . . 23. f1 : ℕL[c]→ℕn
. | . | | . . 24. increasing(f1;L[c])
. | . | | . . 25. s : ℕL[c] List
. | . | | . . 26. ||s|| = k
. | . | | . . 27. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
```

```
. | . | | . . ⊢  map(f1;s)
. | . | | . .    ∈ {s:(ℕn List)
. | . | | . .       | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | | . .   by ((Analyze THEN (Try (Complete Auto))
. | . | | . .        THEN
. | . | | . .        (RWO
. | . | | . .         Thm* ∀f:(A→B), as:A List.
. | . | | . .              ||map(f;as)|| = ||as|| ∈ ℤ
. | . | | . .         {map_length}
. | . | | . .         0))
. | . | | . .       THEN
. | . | | . .       (RWO
. | . | | . .        Thm* ∀f:(A→B), as:A List, n:ℕ||as||.
. | . | | . .             map(f;as)[n] = f(as[n])
. | . | | . .        {map_select}
. | . | | . .        0))
. | . | | . .      THEN
. | . | | . .      (AllHyps
. | . | | . .       (λh.
. | . | | . .        ((FwdThru
. | . | | . .          Thm* ∀k:ℕ, f:(ℕk→ℤ).
. | . | | . .               increasing(f;k)
. | . | | . .               ⇒
. | . | | . .               (∀x,y:ℕk. x<y ⇒ f(x)<f(y))
. | . | | . .          {increasing_implies}
. | . | | . .          [h])
. | . | | . .         THEN
. | . | | . .         (BackThru -1))
. | . | | . .        THEN
. | . | | . .        EasyHyp))
. | . | |
. | . | .\
. | . | . 1. r : ℕ
. | . | . 2. k : ℕ
. | . | . 3. L : ℕ List
. | . | . 4. R : ℕ List
. | . | . 5. 2≤k
. | . | . 6. ||R|| = ||L||
. | . | . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | . 8. r->R^k-1
. | . | . 9. n : ℕ
. | . | . 10. r+1≤n
. | . | . 11. G :
. | . | . |   {s:(ℕn List)
. | . | . |    | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | . |   →ℕ||L||
. | . | . 12. c : ℕ||R||
. | . | . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | . 14. increasing(f;R[c])
. | . | . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | . |   ||s|| = k-1
. | . | . |   ⇒
. | . | . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | . |   ⇒
. | . | . |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
```

```
. | . | . 16. 0<L[c]
. | . | . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | . 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | . |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | . |      | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | . |     →ℕ||L[c--]||
. | . | . 19. c@0 : ℕ||L[c--]||
. | . | . 20. ∃f@0:(ℕL[c--][c@0]→ℕR[c]).
. | . | . |   increasing(f@0;L[c--][c@0])
. | . | . |   & (∀s:ℕL[c--][c@0] List.
. | . | . |      ||s|| = k
. | . | . |      ⇒
. | . | . |      (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | . |      ⇒
. | . | . |      G(map(f;map(f@0;s))) = c@0)
. | . | . 21. c@0 ∈ ℕ||L||
. | . | . 22. ¬c@0 = c

. | . | . ⊢  ∃f:(ℕL[c@0]→ℕn).
. | . | . |  increasing(f;L[c@0])
. | . | . |  & (∀s:ℕL[c@0] List.
. | . | . |     ||s|| = k
. | . | . |     ⇒
. | . | . |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s)) = c@0)
. | . | . | by Subst' (L[c--][c@0] = L[c@0]) -3
. | . | . |
. | . | . |\
. | . | . | 1. r : ℕ
. | . | . | 2. k : ℕ
. | . | . | 3. L : ℕ List
. | . | . | 4. R : ℕ List
. | . | . | 5. 2≤k
. | . | . | 6. ||R|| = ||L||
. | . | . | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | . | 8. r->R^k-1
. | . | . | 9. n : ℕ
. | . | . | 10. r+1≤n
. | . | . | 11. G :
. | . | . |     {s:(ℕn List)
. | . | . |      | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | . |     →ℕ||L||
. | . | . | 12. c : ℕ||R||
. | . | . | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | . | 14. increasing(f;R[c])
. | . | . | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | . |     ||s|| = k-1
. | . | . |     ⇒
. | . | . |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | . |     ⇒
. | . | . |     G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | . | 16. 0<L[c]
. | . | . | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | . | 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | . |     ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | . |        | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | . |       →ℕ||L[c--]||
```

```
. | . | . | 19. c@0 : ℕ||L[c--]||
. | . | . | 20. ∃f@0:(ℕL[c--][c@0]→ℕR[c]).
. | . | . |     increasing(f@0;L[c--][c@0])
. | . | . |     & (∀s:ℕL[c--][c@0] List.
. | . | . |        ||s|| = k
. | . | . |        ⇒
. | . | . |        (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | . |        ⇒
. | . | . |        G(map(f;map(f@0;s))) = c@0)
. | . | . | 21. c@0 ∈ ℕ||L||
. | . | . | 22. ¬c@0 = c
. | . | . | ⊢  L[c--][c@0] = L[c@0]
. | . | . |   by (RWO
. | . | . |       Thm* ∀L:ℕ List, i,j:ℕ||L||.
. | . | . |            0<L[i]
. | . | . |            ⇒
. | . | . |            L[i--][j] = if j=₂i→ L[j]-1 else L[j] fi
. | . | . |       {list_DASH_dec_DASH_select}
. | . | . |       0)
. | . | . |      THEN
. | . | . |      SplitOnConclITE
. | . | . |
. | . | . .\
. | . | . . 1. r : ℕ
. | . | . . 2. k : ℕ
. | . | . . 3. L : ℕ List
. | . | . . 4. R : ℕ List
. | . | . . 5. 2≤k
. | . | . . 6. ||R|| = ||L||
. | . | . . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | . . 8. r->R^k-1
. | . | . . 9. n : ℕ
. | . | . . 10. r+1≤n
. | . | . . 11. G :
. | . | . . |   {s:(ℕn List)
. | . | . . |    | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | . . |   →ℕ||L||
. | . | . . 12. c : ℕ||R||
. | . | . . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | . . 14. increasing(f;R[c])
. | . | . . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | . . |   ||s|| = k-1
. | . | . . |   ⇒
. | . | . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | . . |   ⇒
. | . | . . |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | . . 16. 0<L[c]
. | . | . . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | . . 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | . . |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | . . |      | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | . . |     →ℕ||L[c--]||
. | . | . . 19. c@0 : ℕ||L[c--]||
. | . | . . 20. ∃f@0:(ℕL[c@0]→ℕR[c]).
. | . | . . |   increasing(f@0;L[c@0])
```

```
. | . | . . |   & (∀s:ℕL[c@0] List.
. | . | . . |      ||s|| = k
. | . | . . |      ⇒
. | . | . . |      (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | . . |      ⇒
. | . | . . |      G(map(f;map(f@0;s))) = c@0)
. | . | . . 21. c@0 ∈ ℕ||L||
. | . | . . 22. ¬c@0 = c
. | . | . . ⊢  ∃f:(ℕL[c@0]→ℕn).
. | . | . . |  increasing(f;L[c@0])
. | . | . . |  & (∀s:ℕL[c@0] List.
. | . | . . |     ||s|| = k
. | . | . . |     ⇒
. | . | . . |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | . . |     ⇒
. | . | . . |     G(map(f;s)) = c@0)
. | . | . . | by ExRepD THEN (InstConcl [f o f@0])
. | . | . . |    THEN
. | . | . . |    (Try (Complete Auto))
. | . | . . |
. | . | . . |\
. | . | . . | 1. r : ℕ
. | . | . . | 2. k : ℕ
. | . | . . | 3. L : ℕ List
. | . | . . | 4. R : ℕ List
. | . | . . | 5. 2≤k
. | . | . . | 6. ||R|| = ||L||
. | . | . . | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | . . | 8. r->R^k-1
. | . | . . | 9. n : ℕ
. | . | . . | 10. r+1≤n
. | . | . . | 11. G :
. | . | . . | |   {s:(ℕn List)
. | . | . . | |    | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | . . | |   →ℕ||L||
. | . | . . | 12. c : ℕ||R||
. | . | . . | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | . . | 14. increasing(f;R[c])
. | . | . . | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | . . | |   ||s|| = k-1
. | . | . . | |   ⇒
. | . | . . | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | . . | |   ⇒
. | . | . . | |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | . . | 16. 0<L[c]
. | . | . . | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | . . | 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | . . | |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | . . | |      | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | . . | |     →ℕ||L[c--]||
. | . | . . | 19. c@0 : ℕ||L[c--]||
. | . | . . | 20. f@0 : ℕL[c@0]→ℕR[c]
. | . | . . | 21. increasing(f@0;L[c@0])
. | . | . . | 22. ∀s:ℕL[c@0] List.
. | . | . . | |   ||s|| = k
```

```
. | . | . . | |   ⇒
. | . | . . | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | . . | |   ⇒
. | . | . . | |   G(map(f;map(f@0;s))) = c@0
. | . | . . | 23. c@0 ∈ ℕ||L||
. | . | . . | 24. ¬c@0 = c
. | . | . . | ⊢  increasing(f o f@0;L[c@0])
. | . | . . | |  & (∀s:ℕL[c@0] List.
. | . | . . | |     ||s|| = k
. | . | . . | |     ⇒
. | . | . . | |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | . . | |     ⇒
. | . | . . | |     G(map(f o f@0;s)) = c@0)  by Analyze 0
. | . | . . | |
. | . | . . | |\
. | . | . . | | 1. r : ℕ
. | . | . . | | 2. k : ℕ
. | . | . . | | 3. L : ℕ List
. | . | . . | | 4. R : ℕ List
. | . | . . | | 5. 2≤k
. | . | . . | | 6. ||R|| = ||L||
. | . | . . | | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | . . | | 8. r->R^k-1
. | . | . . | | 9. n : ℕ
. | . | . . | | 10. r+1≤n
. | . | . . | | 11. G :
. | . | . . | |     {s:(ℕn List)
. | . | . . | |      | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | . . | |     →ℕ||L||
. | . | . . | | 12. c : ℕ||R||
. | . | . . | | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | . . | | 14. increasing(f;R[c])
. | . | . . | | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | . . | |     ||s|| = k-1
. | . | . . | |     ⇒
. | . | . . | |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | . . | |     ⇒
. | . | . . | |     G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | . . | | 16. 0<L[c]
. | . | . . | | 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | . . | | 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | . . | |     ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | . . | |        | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | . . | |       →ℕ||L[c--]||
. | . | . . | | 19. c@0 : ℕ||L[c--]||
. | . | . . | | 20. f@0 : ℕL[c@0]→ℕR[c]
. | . | . . | | 21. increasing(f@0;L[c@0])
. | . | . . | | 22. ∀s:ℕL[c@0] List.
. | . | . . | |     ||s|| = k
. | . | . . | |     ⇒
. | . | . . | |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | . . | |     ⇒
. | . | . . | |     G(map(f;map(f@0;s))) = c@0
. | . | . . | | 23. c@0 ∈ ℕ||L||
. | . | . . | | 24. ¬c@0 = c
```

```
. | . | . . | | ⊢  increasing(f o f@0;L[c@0])
. | . | . . | |   by BackThru
. | . | . . | |      Thm* ∀k,m:ℕ, f:(ℕk→ℕm), g:(ℕm→ℤ).
. | . | . . | |           increasing(f;k)
. | . | . . | |           ⇒
. | . | . . | |           increasing(g;m) ⇒ increasing(g o f;k)
. | . | . . | |      {compose_increasing}
. | . | . . | |
. | . | . . | .\
. | . | . . | . 1. r : ℕ
. | . | . . | . 2. k : ℕ
. | . | . . | . 3. L : ℕ List
. | . | . . | . 4. R : ℕ List
. | . | . . | . 5. 2≤k
. | . | . . | . 6. ||R|| = ||L||
. | . | . . | . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | . . | . 8. r->R^k-1
. | . | . . | . 9. n : ℕ
. | . | . . | . 10. r+1≤n
. | . | . . | . 11. G :
. | . | . . | . |   {s:(ℕn List)
. | . | . . | . |    | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | . . | . |   →ℕ||L||
. | . | . . | . 12. c : ℕ||R||
. | . | . . | . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | . . | . 14. increasing(f;R[c])
. | . | . . | . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | . . | . |   ||s|| = k-1
. | . | . . | . |   ⇒
. | . | . . | . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | . . | . |   ⇒
. | . | . . | . |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | . . | . 16. 0<L[c]
. | . | . . | . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | . . | . 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | . . | . |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | . . | . |      | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | . . | . |     →ℕ||L[c--]||
. | . | . . | . 19. c@0 : ℕ||L[c--]||
. | . | . . | . 20. f@0 : ℕL[c@0]→ℕR[c]
. | . | . . | . 21. increasing(f@0;L[c@0])
. | . | . . | . 22. ∀s:ℕL[c@0] List.
. | . | . . | . |   ||s|| = k
. | . | . . | . |   ⇒
. | . | . . | . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | . . | . |   ⇒
. | . | . . | . |   G(map(f;map(f@0;s))) = c@0
. | . | . . | . 23. c@0 ∈ ℕ||L||
. | . | . . | . 24. ¬c@0 = c
. | . | . . | . 25. increasing(f o f@0;L[c@0])
. | . | . . | . ⊢  ∀s:ℕL[c@0] List.
. | . | . . | . |  ||s|| = k
. | . | . . | . |  ⇒
. | . | . . | . |  (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | . . | . |  ⇒
```

```
. | . | . . | . |  G(map(f o f@0;s)) = c@0
. | . | . . | . | by (ParallelOp -4) THEN (Try (Complete Auto))
. | . | . . | . |
. | . | . . | . 1. r : ℕ
. | . | . . | . 2. k : ℕ
. | . | . . | . 3. L : ℕ List
. | . | . . | . 4. R : ℕ List
. | . | . . | . 5. 2≤k
. | . | . . | . 6. ||R|| = ||L||
. | . | . . | . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | . . | . 8. r->R^k-1
. | . | . . | . 9. n : ℕ
. | . | . . | . 10. r+1≤n
. | . | . . | . 11. G :
. | . | . . | .     {s:(ℕn List)
. | . | . . | .      | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | . . | .     →ℕ||L||
. | . | . . | . 12. c : ℕ||R||
. | . | . . | . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | . . | . 14. increasing(f;R[c])
. | . | . . | . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | . . | .     ||s|| = k-1
. | . | . . | .     ⇒
. | . | . . | .     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | . . | .     ⇒
. | . | . . | .     G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | . . | . 16. 0<L[c]
. | . | . . | . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | . . | . 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . | . . | .     ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | . . | .        | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | . . | .       →ℕ||L[c--]||
. | . | . . | . 19. c@0 : ℕ||L[c--]||
. | . | . . | . 20. f@0 : ℕL[c@0]→ℕR[c]
. | . | . . | . 21. increasing(f@0;L[c@0])
. | . | . . | . 22. ∀s:ℕL[c@0] List.
. | . | . . | .     ||s|| = k
. | . | . . | .     ⇒
. | . | . . | .     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | . . | .     ⇒
. | . | . . | .     G(map(f;map(f@0;s))) = c@0
. | . | . . | . 23. c@0 ∈ ℕ||L||
. | . | . . | . 24. ¬c@0 = c
. | . | . . | . 25. increasing(f o f@0;L[c@0])
. | . | . . | . 26. s : ℕL[c@0] List
. | . | . . | . 27. ||s|| = k
. | . | . . | .     ⇒
. | . | . . | .     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | . . | .     ⇒
. | . | . . | .     G(map(f;map(f@0;s))) = c@0
. | . | . . | . ⊢  ||s|| = k
. | . | . . | .    ⇒
. | . | . . | .    (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | . . | .    ⇒
. | . | . . | .    G(map(f o f@0;s)) = c@0
```

```
. | . | . . | .   by RWO
. | . | . . | .      Thm* ∀f,g:Top, s:Top List.
. | . | . . | .           map(f;map(g;s)) ~ map(f o g;s)
. | . | . . | .      {map_DASH_map}
. | . | . . | .      -1
. | . | . . |
. | . | . . .\
. | . | . . . .....wf .....
. | . | . . . 1. r : ℕ
. | . | . . . 2. k : ℕ
. | . | . . . 3. L : ℕ List
. | . | . . . 4. R : ℕ List
. | . | . . . 5. 2≤k
. | . | . . . 6. ||R|| = ||L||
. | . | . . . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | . . . 8. r->R^k-1
. | . | . . . 9. n : ℕ
. | . | . . . 10. r+1≤n
. | . | . . . 11. G :
. | . | . . . |   {s:(ℕn List)
. | . | . . . |    | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | . . . |   →ℕ||L||
. | . | . . . 12. c : ℕ||R||
. | . | . . . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | . . . 14. increasing(f;R[c])
. | . | . . . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | . . . |   ||s|| = k-1
. | . | . . . |   ⇒
. | . | . . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | . . . |   ⇒
. | . | . . . |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | . . . 16. 0<L[c]
. | . | . . . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | . . . 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | . . . |   ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | . . . |      | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | . . . |     →ℕ||L[c--]||
. | . | . . . 19. c@0 : ℕ||L[c--]||
. | . | . . . 20. f@0 : ℕL[c@0]→ℕR[c]
. | . | . . . 21. increasing(f@0;L[c@0])
. | . | . . . 22. ∀s:ℕL[c@0] List.
. | . | . . . |   ||s|| = k
. | . | . . . |   ⇒
. | . | . . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | . . . |   ⇒
. | . | . . . |   G(map(f;map(f@0;s))) = c@0
. | . | . . . 23. c@0 ∈ ℕ||L||
. | . | . . . 24. ¬c@0 = c
. | . | . . . 25. f1 : ℕL[c@0]→ℕn
. | . | . . . ⊢  (increasing(f1;L[c@0])
. | . | . . . |   & (∀s:ℕL[c@0] List.
. | . | . . . |      ||s|| = k
. | . | . . . |      ⇒
. | . | . . . |      (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | . . . |      ⇒
```

```
. | . | . . . |      G(map(f1;s)) = c@0))
. | . | . . . |  ∈ Prop  by Auto
. | . | . . . |
. | . | . . . .....subterm .....
. | . | . . . 1. r : ℕ
. | . | . . . 2. k : ℕ
. | . | . . . 3. L : ℕ List
. | . | . . . 4. R : ℕ List
. | . | . . . 5. 2≤k
. | . | . . . 6. ||R|| = ||L||
. | . | . . . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . | . . . 8. r->R^k-1
. | . | . . . 9. n : ℕ
. | . | . . . 10. r+1≤n
. | . | . . . 11. G :
. | . | . . .     {s:(ℕn List)
. | . | . . .      | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | . . .     →ℕ||L||
. | . | . . . 12. c : ℕ||R||
. | . | . . . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . | . . . 14. increasing(f;R[c])
. | . | . . . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . | . . .     ||s|| = k-1
. | . | . . .     ⇒
. | . | . . .     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | . . .     ⇒
. | . | . . .     G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . | . . . 16. 0<L[c]
. | . | . . . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . | . . . 18. (λ2s. G(map(f;s)))
. | . | . . .     ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . | . . .        | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | . . .       →ℕ||L[c--]||
. | . | . . . 19. c@0 : ℕ||L[c--]||
. | . | . . . 20. f@0 : ℕL[c@0]→ℕR[c]
. | . | . . . 21. increasing(f@0;L[c@0])
. | . | . . . 22. ∀s:ℕL[c@0] List.
. | . | . . .     ||s|| = k
. | . | . . .     ⇒
. | . | . . .     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . | . . .     ⇒
. | . | . . .     G(map(f;map(f@0;s))) = c@0
. | . | . . . 23. c@0 ∈ ℕ||L||
. | . | . . . 24. ¬c@0 = c
. | . | . . . 25. f1 : ℕL[c@0]→ℕn
. | . | . . . 26. increasing(f1;L[c@0])
. | . | . . . 27. s : ℕL[c@0] List
. | . | . . . 28. ||s|| = k
. | . | . . . 29. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . | . . . ⊢  map(f1;s)
. | . | . . .    ∈ {s:(ℕn List)
. | . | . . .       | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . | . . .   by ((Analyze THEN (Try (Complete Auto))
. | . | . . .        THEN
. | . | . . .        (RWO
```

```
. | . | . . .         Thm* ∀f:(A→B), as:A List.
. | . | . . .              ||map(f;as)|| = ||as|| ∈ ℤ
. | . | . . .         {map_length}
. | . | . . .         0))
. | . | . . .       THEN
. | . | . . .       (RWO
. | . | . . .        Thm* ∀f:(A→B), as:A List, n:ℕ||as||.
. | . | . . .             map(f;as)[n] = f(as[n])
. | . | . . .        {map_select}
. | . | . . .        0))
. | . | . . .      THEN
. | . | . . .      (AllHyps
. | . | . . .       (λh.
. | . | . . .        ((FwdThru
. | . | . . .          Thm* ∀k:ℕ, f:(ℕk→ℤ).
. | . | . . .               increasing(f;k)
. | . | . . .               ⇒
. | . | . . .               (∀x,y:ℕk. x<y ⇒ f(x)<f(y))
. | . | . . .          {increasing_implies}
. | . | . . .          [h])
. | . | . . .         THEN
. | . | . . .         (BackThru -1))
. | . | . . .        THEN
. | . | . . .        EasyHyp))
. | . |
. | . .\
. | . . .....subterm .....
. | . . 1. r : ℕ
. | . . 2. k : ℕ
. | . . 3. L : ℕ List
. | . . 4. R : ℕ List
. | . . 5. 2≤k
. | . . 6. ||R|| = ||L||
. | . . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. | . . 8. r->R^k-1
. | . . 9. n : ℕ
. | . . 10. r+1≤n
. | . . 11. G :
. | . .     {s:(ℕn List)
. | . .      | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . .     →ℕ||L||
. | . . 12. c : ℕ||R||
. | . . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. | . . 14. increasing(f;R[c])
. | . . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. | . .     ||s|| = k-1
. | . .     ⇒
. | . .     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . .     ⇒
. | . .     G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. | . . 16. 0<L[c]
. | . . 17. R[c]->L[c--]^k
. | . . 18. (λ₂s. G(map(f;s)))
. | . .     ∈ {s:(ℕR[c] List)
. | . .        | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
```

```
. | . .       →ℕ||L[c--]||
. | . . 19. c@0 : ℕ||L[c--]||
. | . . 20. ∃f@0:(ℕL[c--][c@0]→ℕR[c]).
. | . .     increasing(f@0;L[c--][c@0])
. | . .     & (∀s:ℕL[c--][c@0] List.
. | . .        ||s|| = k
. | . .        ⇒
. | . .        (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. | . .        ⇒
. | . .        G(map(f;map(f@0;s))) = c@0)
. | . . 21. c@0 ∈ ℕ||L||
. | . . 22. c1 : ℕ||L||
. | . . 23. f1 : ℕL[c1]→ℕn
. | . . 24. increasing(f1;L[c1])
. | . . 25. s : ℕL[c1] List
. | . . 26. ||s|| = k
. | . . 27. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. | . . ⊢  map(f1;s)
. | . .    ∈ {s:(ℕn List)
. | . .       | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. | . .   by ((Analyze THEN (Try (Complete Auto))
. | . .        THEN
. | . .        (RWO
. | . .         Thm* ∀f:(A→B), as:A List. ||map(f;as)|| = ||as|| ∈ ℤ
. | . .         {map_length}
. | . .         0))
. | . .       THEN
. | . .       (RWO
. | . .        Thm* ∀f:(A→B), as:A List, n:ℕ||as||.
. | . .             map(f;as)[n] = f(as[n])
. | . .        {map_select}
. | . .        0))
. | . .      THEN
. | . .      (AllHyps
. | . .       (λh.
. | . .        ((FwdThru
. | . .          Thm* ∀k:ℕ, f:(ℕk→ℤ).
. | . .               increasing(f;k) ⇒ (∀x,y:ℕk. x<y ⇒ f(x)<f(y))
. | . .          {increasing_implies}
. | . .          [h])
. | . .         THEN
. | . .         (BackThru -1))
. | . .        THEN
. | . .        EasyHyp))
. |
. .\
. . 1. r : ℕ
. . 2. k : ℕ
. . 3. L : ℕ List
. . 4. R : ℕ List
. . 5. 2≤k
. . 6. ||R|| = ||L||
. . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. . 8. r->R^k-1
. . 9. n : ℕ
```

```
. . 10. r+1≤n
. . 11. G :
. . |   {s:(ℕn List)| ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }→
. . |   ℕ||L||
. . 12. c : ℕ||R||
. . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. . 14. increasing(f;R[c])
. . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. . |   ||s|| = k-1
. . |   ⇒
. . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. . 16. ¬0<L[c]
. . ⊢  ∃c:ℕ||L||, f:(ℕL[c]→ℕn).
. . |  increasing(f;L[c])
. . |  & (∀s:ℕL[c] List.
. . |     ||s|| = k
. . |     ⇒
. . |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s)) = c)
. . | by InstConcl [c]
. . |
. . |\
. . | 1. r : ℕ
. . | 2. k : ℕ
. . | 3. L : ℕ List
. . | 4. R : ℕ List
. . | 5. 2≤k
. . | 6. ||R|| = ||L||
. . | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. . | 8. r->R^k-1
. . | 9. n : ℕ
. . | 10. r+1≤n
. . | 11. G :
. . | |   {s:(ℕn List)| ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. . | |   →ℕ||L||
. . | 12. c : ℕ||R||
. . | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. . | 14. increasing(f;R[c])
. . | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. . | |   ||s|| = k-1
. . | |   ⇒
. . | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. . | 16. ¬0<L[c]
. . | ⊢  ∃f:(ℕL[c]→ℕn).
. . | |  increasing(f;L[c])
. . | |  & (∀s:ℕL[c] List.
. . | |     ||s|| = k
. . | |     ⇒
. . | |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s)) = c)
. . | | by Subst (L[c] ~ 0) 0
. . | |
. . | 1. r : ℕ
. . | 2. k : ℕ
. . | 3. L : ℕ List
. . | 4. R : ℕ List
. . | 5. 2≤k
```

```
. . | 6. ||R|| = ||L||
. . | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. . | 8. r->R^k-1
. . | 9. n : ℕ
. . | 10. r+1≤n
. . | 11. G :
. . | |   {s:(ℕn List)| ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. . | |   →ℕ||L||
. . | 12. c : ℕ||R||
. . | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. . | 14. increasing(f;R[c])
. . | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. . | |   ||s|| = k-1
. . | |   ⇒
. . | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. . | 16. ¬0<L[c]
. . | ⊢  ∃f:(ℕ0→ℕn).
. . | |  increasing(f;0)
. . | |  & (∀s:ℕ0 List.
. . | |     ||s|| = k
. . | |     ⇒
. . | |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s)) = c)
. . | | by InstConcl [λx.·]
. . | |
. . | |\
. . | | 1. r : ℕ
. . | | 2. k : ℕ
. . | | 3. L : ℕ List
. . | | 4. R : ℕ List
. . | | 5. 2≤k
. . | | 6. ||R|| = ||L||
. . | | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. . | | 8. r->R^k-1
. . | | 9. n : ℕ
. . | | 10. r+1≤n
. . | | 11. G :
. . | |     {s:(ℕn List)
. . | |      | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. . | |     →ℕ||L||
. . | | 12. c : ℕ||R||
. . | | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. . | | 14. increasing(f;R[c])
. . | | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. . | |     ||s|| = k-1
. . | |     ⇒
. . | |     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. . | |     ⇒
. . | |     G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. . | | 16. ¬0<L[c]
. . | | ⊢  increasing(λx.·;0)
. . | |   by (Analyze 0) THEN (Reduce 0) THEN (Analyze -1)
. . | |
. . | |\
. . | | 1. r : ℕ
. . | | 2. k : ℕ
```

```
. . | | 3. L : ℕ List
. . | | 4. R : ℕ List
. . | | 5. 2≤k
. . | | 6. ||R|| = ||L||
. . | | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. . | | 8. r->R^k-1
. . | | 9. n : ℕ
. . | | 10. r+1≤n
. . | | 11. G :
. . | | |   {s:(ℕn List)
. . | | |    | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. . | | |   →ℕ||L||
. . | | 12. c : ℕ||R||
. . | | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. . | | 14. increasing(f;R[c])
. . | | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. . | | |   ||s|| = k-1
. . | | |   ⇒
. . | | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. . | | |   ⇒
. . | | |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. . | | 16. ¬0<L[c]
. . | | 17. s : ℕ0 List
. . | | 18. ||s|| = k
. . | | 19. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. . | | ⊢  G(map(λx.·;s)) = c  by Assert False
. . | | |
. . | | .....assertion .....
. . | | 1. r : ℕ
. . | | 2. k : ℕ
. . | | 3. L : ℕ List
. . | | 4. R : ℕ List
. . | | 5. 2≤k
. . | | 6. ||R|| = ||L||
. . | | 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. . | | 8. r->R^k-1
. . | | 9. n : ℕ
. . | | 10. r+1≤n
. . | | 11. G :
. . | | |   {s:(ℕn List)
. . | | |    | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. . | | |   →ℕ||L||
. . | | 12. c : ℕ||R||
. . | | 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. . | | 14. increasing(f;R[c])
. . | | 15. ∀s:ℕR[c] List.
. . | | |   ||s|| = k-1
. . | | |   ⇒
. . | | |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. . | | |   ⇒
. . | | |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. . | | 16. ¬0<L[c]
. . | | 17. s : ℕ0 List
. . | | 18. ||s|| = k
. . | | 19. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
```

```
. . | | ⊢  False  by (Thin -1) THEN (Lemmaize [5;17])
. . | | |
. . | | ⊢  ∀k:ℕ. 2≤k ⇒ (∀s:ℕ0 List. ||s|| = k ⇒ False)
. . | |   by Auto THEN (Analyze -2)
. . | |
. . | .\
. . | . .....subterm .....
. . | . 1. r : ℕ
. . | . 2. k : ℕ
. . | . 3. L : ℕ List
. . | . 4. R : ℕ List
. . | . 5. 2≤k
. . | . 6. ||R|| = ||L||
. . | . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. . | . 8. r->R^k-1
. . | . 9. n : ℕ
. . | . 10. r+1≤n
. . | . 11. G :
. . | . |   {s:(ℕn List)
. . | . |    | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. . | . |   →ℕ||L||
. . | . 12. c : ℕ||R||
. . | . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. . | . 14. increasing(f;R[c])
. . | . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. . | . |   ||s|| = k-1
. . | . |   ⇒
. . | . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. . | . |   ⇒
. . | . |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. . | . 16. ¬0<L[c]
. . | . 17. f1 : ℕ0→ℕn
. . | . 18. increasing(f1;0)
. . | . 19. s : ℕ0 List
. . | . 20. ||s|| = k
. . | . 21. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. . | . ⊢  map(f1;s)
. . | . |  ∈ {s:(ℕn List)
. . | . |     | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. . | . | by Assert False
. . | . |
. . | . .....assertion .....
. . | . 1. r : ℕ
. . | . 2. k : ℕ
. . | . 3. L : ℕ List
. . | . 4. R : ℕ List
. . | . 5. 2≤k
. . | . 6. ||R|| = ||L||
. . | . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. . | . 8. r->R^k-1
. . | . 9. n : ℕ
. . | . 10. r+1≤n
. . | . 11. G :
. . | . |   {s:(ℕn List)
. . | . |    | ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
```

```
. . | . |   →ℕ||L||
. . | . 12. c : ℕ||R||
. . | . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. . | . 14. increasing(f;R[c])
. . | . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. . | . |   ||s|| = k-1
. . | . |   ⇒
. . | . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y])
. . | . |   ⇒
. . | . |   G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. . | . 16. ¬0<L[c]
. . | . 17. f1 : ℕ0→ℕn
. . | . 18. increasing(f1;0)
. . | . 19. s : ℕ0 List
. . | . 20. ||s|| = k
. . | . 21. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. . | . ⊢  False  by (Thin -1) THEN (Lemmaize [5;20])
. . | . |
. . | . ⊢  ∀k:ℕ, s:ℕ0 List. 2≤k ⇒ ||s|| = k ⇒ False
. . | .   by Auto THEN (Analyze -3)
. . |
. . .\
. . . .....subterm .....
. . . 1. r : ℕ
. . . 2. k : ℕ
. . . 3. L : ℕ List
. . . 4. R : ℕ List
. . . 5. 2≤k
. . . 6. ||R|| = ||L||
. . . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. . . 8. r->R^k-1
. . . 9. n : ℕ
. . . 10. r+1≤n
. . . 11. G :
. . . |   {s:(ℕn List)| ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. . . |   →ℕ||L||
. . . 12. c : ℕ||R||
. . . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. . . 14. increasing(f;R[c])
. . . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. . . |   ||s|| = k-1
. . . |   ⇒
. . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. . . 16. ¬0<L[c]
. . . 17. c1 : ℕ||L||
. . . 18. f1 : ℕL[c1]→ℕn
. . . 19. increasing(f1;L[c1])
. . . 20. s : ℕL[c1] List
. . . 21. ||s|| = k
. . . 22. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. . . ⊢  map(f1;s)
. . . |  ∈ {s:(ℕn List)| ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. . . | by Analyze THEN (Try (Complete Auto))
. . . |
. . . .....set predicate .....
```

```
. . . 1. r : ℕ
. . . 2. k : ℕ
. . . 3. L : ℕ List
. . . 4. R : ℕ List
. . . 5. 2≤k
. . . 6. ||R|| = ||L||
. . . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. . . 8. r->R^k-1
. . . 9. n : ℕ
. . . 10. r+1≤n
. . . 11. G :
. . . |   {s:(ℕn List)| ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. . . |   →ℕ||L||
. . . 12. c : ℕ||R||
. . . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
. . . 14. increasing(f;R[c])
. . . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. . . |   ||s|| = k-1
. . . |   ⇒
. . . |   (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. . . 16. ¬0<L[c]
. . . 17. c1 : ℕ||L||
. . . 18. f1 : ℕL[c1]→ℕn
. . . 19. increasing(f1;L[c1])
. . . 20. s : ℕL[c1] List
. . . 21. ||s|| = k
. . . 22. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. . . ⊢  ||map(f1;s)|| = k
. . . |  & (∀x,y:ℕ||map(f1;s)||. x<y ⇒ map(f1;s)[x]<map(f1;s)[y])
. . . | by (RWO
. . . |     Thm* ∀f:(A→B), as:A List. ||map(f;as)|| = ||as|| ∈ ℤ
. . . |     {map_length}
. . . |     0)
. . . |    THEN
. . . |    (RWO
. . . |     Thm* ∀f:(A→B), as:A List, n:ℕ||as||.
. . . |          map(f;as)[n] = f(as[n])
. . . |     {map_select}
. . . |     0)
. . . |
. . . 1. r : ℕ
. . . 2. k : ℕ
. . . 3. L : ℕ List
. . . 4. R : ℕ List
. . . 5. 2≤k
. . . 6. ||R|| = ||L||
. . . 7. ∀i:ℕ||L||. 0<L[i] ⇒ R[i]->L[i--]^k
. . . 8. r->R^k-1
. . . 9. n : ℕ
. . . 10. r+1≤n
. . . 11. G :
. . .     {s:(ℕn List)| ||s|| = k & (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) }
. . .     →ℕ||L||
. . . 12. c : ℕ||R||
. . . 13. f : ℕR[c]→ℕ(n-1)
```

```
. . . 14. increasing(f;R[c])
. . . 15. ∀s:ℕR[c] List.
. . .     ||s|| = k-1
. . .     ⇒
. . .     (∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]) ⇒ G(map(f;s) @ [(n-1)]) = c
. . . 16. ¬0<L[c]
. . . 17. c1 : ℕ||L||
. . . 18. f1 : ℕL[c1]→ℕn
. . . 19. increasing(f1;L[c1])
. . . 20. s : ℕL[c1] List
. . . 21. ||s|| = k
. . . 22. ∀x,y:ℕ||s||. x<y ⇒ s[x]<s[y]
. . . 23. x : ℕ||s||
. . . 24. y : ℕ||s||
. . . 25. x<y
. . . ⊢  f1(s[x])<f1(s[y])
. . .   by (FwdThru
. . .       Thm* ∀k:ℕ, f:(ℕk→ℤ).
. . .            increasing(f;k) ⇒ (∀x,y:ℕk. x<y ⇒ f(x)<f(y))
. . .       {increasing_implies}
. . .       [-7])
. . .      THEN
. . .      (BackThru -1)
. . .      THEN
. . .      EasyHyp
END
```