```
hless_def  THM

⊢  all
|  (λm:hnum. all
|            (λn:hnum. equal
|                       (lt(m,n)
|                       ,exists
|                        (λP:hnum → hbool. and
|                                            (all
|                                             (λn:hnum. implies
|                                                        (P(suc(n))
|                                                        ,P(n)))
|                                            ,and(P(m),not(P(n))))))))
| by HN THEN StrongAuto
|
1. m : ℕ
2. n : ℕ
⊢  (m<_2n) = (∃_bP:ℕ→𝔹. ((∀_bn:ℕ. (P(n+1))⇒_2(P(n)))∧_2(P(m))∧_2¬_2P(n)))
| by Simpsetp [‘bequal‘] THEN StrongAuto
|
|\
| 1. m : ℕ
| 2. n : ℕ
| 3. m<n
| ⊢  ∃P:(ℕ→𝔹). (∀n:ℕ. P(n+1) ⇒ P(n)) & P(m) & ¬P(n)
|   by DTerm (λm.m<_2n) 0 THEN Simp THEN StrongAuto
|
.\
. 1. m : ℕ
. 2. n : ℕ
. 3. ∃P:(ℕ→𝔹). (∀n:ℕ. P(n+1) ⇒ P(n)) & P(m) & ¬P(n)
. ⊢  m<n  by Analyze 3 THEN StrongAuto
. |
. 1. m : ℕ
. 2. n : ℕ
. 3. P : ℕ→𝔹
. 4. ∀n:ℕ. P(n+1) ⇒ P(n)
. 5. P(m)
. 6. ¬P(n)
. ⊢  m<n  by Case (m<n ∨ m = n ∨ m>n) THEN StrongAuto
. |
. |\
. | 1. m : ℕ
. | 2. n : ℕ
. | 3. P : ℕ→𝔹
. | 4. ∀n:ℕ. P(n+1) ⇒ P(n)
. | 5. P(m)
. | 6. ¬P(n)
. | 7. ¬m<n
. | 8. ¬m = n
. | ⊢  m>n  by Simpset [‘nat_to_int‘] THEN StrongAuto
. |
. |\
. | 1. m : ℕ
. | 2. n : ℕ
```

```
. | 3. P : ℕ→𝔹
. | 4. ∀n:ℕ. P(n+1) ⇒ P(n)
. | 5. P(m)
. | 6. ¬P(n)
. | 7. m = n
. | ⊢  m<n  by H 7 5 THEN StrongAuto
. |
. .\
. . 1. m : ℕ
. . 2. n : ℕ
. . 3. P : ℕ→𝔹
. . 4. ∀n:ℕ. P(n+1) ⇒ P(n)
. . 5. P(m)
. . 6. ¬P(n)
. . 7. m>n
. . ⊢  m<n  by Assert (∀k:ℕ. P(n+k) ⇒ P(n))
. . |
. . |\
. . | .....assertion .....
. . | 1. m : ℕ
. . | 2. n : ℕ
. . | 3. P : ℕ→𝔹
. . | 4. ∀n:ℕ. P(n+1) ⇒ P(n)
. . | 5. P(m)
. . | 6. ¬P(n)
. . | 7. m>n
. . | ⊢  ∀k:ℕ. P(n+k) ⇒ P(n)  by Analyze 0
. . | |
. . | 1. m : ℕ
. . | 2. n : ℕ
. . | 3. P : ℕ→𝔹
. . | 4. ∀n:ℕ. P(n+1) ⇒ P(n)
. . | 5. P(m)
. . | 6. ¬P(n)
. . | 7. m>n
. . | 8. k : ℕ
. . | ⊢  P(n+k) ⇒ P(n)  by Assert (0≤n+k) THEN StrongAuto
. . | |
. . | |\
. . | | .....assertion .....
. . | | 1. m : ℕ
. . | | 2. n : ℕ
. . | | 3. P : ℕ→𝔹
. . | | 4. ∀n:ℕ. P(n+1) ⇒ P(n)
. . | | 5. P(m)
. . | | 6. ¬P(n)
. . | | 7. m>n
. . | | 8. k : ℕ
. . | | ⊢  0≤n+k  by Auto
. . | |
. . | .\
. . | . 1. m : ℕ
. . | . 2. n : ℕ
. . | . 3. P : ℕ→𝔹
. . | . 4. ∀n:ℕ. P(n+1) ⇒ P(n)
```

```
. . | . 5. P(m)
. . | . 6. ¬P(n)
. . | . 7. m>n
. . | . 8. k : ℕ
. . | . 9. 0≤n+k
. . | . 10. P(n+k)
. . | . ⊢  P(n)  by ((MoveToConcl 10) THEN (NInd 8)) THEN StrongAuto
. . | . |
. . | . |\
. . | . | 1. m : ℕ
. . | . | 2. n : ℕ
. . | . | 3. P : ℕ→𝔹
. . | . | 4. ∀n:ℕ. P(n+1) ⇒ P(n)
. . | . | 5. P(m)
. . | . | 6. ¬P(n)
. . | . | 7. m>n
. . | . | 8. 0≤n+0
. . | . | 9. P(n+0)
. . | . | ⊢  P(n)  by ArithSimp 9 THEN StrongAuto
. . | . |
. . | . .\
. . | . . 1. m : ℕ
. . | . . 2. n : ℕ
. . | . . 3. P : ℕ→𝔹
. . | . . 4. ∀n:ℕ. P(n+1) ⇒ P(n)
. . | . . 5. P(m)
. . | . . 6. ¬P(n)
. . | . . 7. m>n
. . | . . 8. k : ℤ
. . | . . 9. 0<k
. . | . . 10. 0≤n+k-1 ⇒ P(n+k-1) ⇒ P(n)
. . | . . 11. 0≤n+k
. . | . . 12. P(n+k)
. . | . . ⊢  P(n)  by BackThru 10 THEN StrongAuto
. . | . . |
. . | . . |\
. . | . . | 1. m : ℕ
. . | . . | 2. n : ℕ
. . | . . | 3. P : ℕ→𝔹
. . | . . | 4. ∀n:ℕ. P(n+1) ⇒ P(n)
. . | . . | 5. P(m)
. . | . . | 6. ¬P(n)
. . | . . | 7. m>n
. . | . . | 8. k : ℤ
. . | . . | 9. 0<k
. . | . . | 10. 0≤n+k-1 ⇒ P(n+k-1) ⇒ P(n)
. . | . . | 11. 0≤n+k
. . | . . | 12. P(n+k)
. . | . . | ⊢  0≤n+k-1  by Assert (0+0≤n+k-1) THEN StrongAuto
. . | . . | |
. . | . . | .....assertion .....
. . | . . | 1. m : ℕ
. . | . . | 2. n : ℕ
. . | . . | 3. P : ℕ→𝔹
. . | . . | 4. ∀n:ℕ. P(n+1) ⇒ P(n)
```

```
. . | . . | 5. P(m)
. . | . . | 6. ¬P(n)
. . | . . | 7. m>n
. . | . . | 8. k : ℤ
. . | . . | 9. 0<k
. . | . . | 10. 0≤n+k-1 ⇒ P(n+k-1) ⇒ P(n)
. . | . . | 11. 0≤n+k
. . | . . | 12. P(n+k)
. . | . . | ⊢  0+0≤n+k-1  by Auto
. . | . . |
. . | . . .\
. . | . . . 1. m : ℕ
. . | . . . 2. n : ℕ
. . | . . . 3. P : ℕ→𝔹
. . | . . . 4. ∀n:ℕ. P(n+1) ⇒ P(n)
. . | . . . 5. P(m)
. . | . . . 6. ¬P(n)
. . | . . . 7. m>n
. . | . . . 8. k : ℤ
. . | . . . 9. 0<k
. . | . . . 10. 0≤n+k-1 ⇒ P(n+k-1) ⇒ P(n)
. . | . . . 11. 0≤n+k
. . | . . . 12. P(n+k)
. . | . . . ⊢  P(n+k-1)  by InstHyp [n+k-1] 4 THEN StrongAuto
. . | . . . |
. . | . . . |\
. . | . . . | .....set predicate .....
. . | . . . | 1. m : ℕ
. . | . . . | 2. n : ℕ
. . | . . . | 3. P : ℕ→𝔹
. . | . . . | 4. ∀n:ℕ. P(n+1) ⇒ P(n)
. . | . . . | 5. P(m)
. . | . . . | 6. ¬P(n)
. . | . . . | 7. m>n
. . | . . . | 8. k : ℤ
. . | . . . | 9. 0<k
. . | . . . | 10. 0≤n+k-1 ⇒ P(n+k-1) ⇒ P(n)
. . | . . . | 11. 0≤n+k
. . | . . . | 12. P(n+k)
. . | . . . | ⊢  0≤n+k-1  by SupInf THEN StrongAuto
. . | . . . |
. . | . . . .\
. . | . . . . .....antecedent .....
. . | . . . . 1. m : ℕ
. . | . . . . 2. n : ℕ
. . | . . . . 3. P : ℕ→𝔹
. . | . . . . 4. ∀n:ℕ. P(n+1) ⇒ P(n)
. . | . . . . 5. P(m)
. . | . . . . 6. ¬P(n)
. . | . . . . 7. m>n
. . | . . . . 8. k : ℤ
. . | . . . . 9. 0<k
. . | . . . . 10. 0≤n+k-1 ⇒ P(n+k-1) ⇒ P(n)
. . | . . . . 11. 0≤n+k
. . | . . . . 12. P(n+k)
```

```
. . | . . . . ⊢  P(n+k-1+1)
. . | . . . .   by ((ArithSimp 0) THEN (ArithSimp 12))
. . | . . . .      THEN
. . | . . . .      StrongAuto
. . |
. . .\
. . . 1. m : ℕ
. . . 2. n : ℕ
. . . 3. P : ℕ→𝔹
. . . 4. ∀n:ℕ. P(n+1) ⇒ P(n)
. . . 5. P(m)
. . . 6. ¬P(n)
. . . 7. m>n
. . . 8. ∀k:ℕ. P(n+k) ⇒ P(n)
. . . ⊢  m<n  by DTerm (m-n) 8 THEN StrongAuto
. . . |
. . . |\
. . . | .....set predicate .....
. . . | 1. m : ℕ
. . . | 2. n : ℕ
. . . | 3. P : ℕ→𝔹
. . . | 4. ∀n:ℕ. P(n+1) ⇒ P(n)
. . . | 5. P(m)
. . . | 6. ¬P(n)
. . . | 7. m>n
. . . | ⊢  0≤m-n  by SupInf THEN StrongAuto
. . . |
. . . .\
. . . . 1. m : ℕ
. . . . 2. n : ℕ
. . . . 3. P : ℕ→𝔹
. . . . 4. ∀n:ℕ. P(n+1) ⇒ P(n)
. . . . 5. P(m)
. . . . 6. ¬P(n)
. . . . 7. m>n
. . . . 8. P(n+m-n) ⇒ P(n)
. . . . ⊢  m<n  by Analyze 8 THEN StrongAuto
. . . . |
. . . . .....antecedent .....
. . . . 1. m : ℕ
. . . . 2. n : ℕ
. . . . 3. P : ℕ→𝔹
. . . . 4. ∀n:ℕ. P(n+1) ⇒ P(n)
. . . . 5. P(m)
. . . . 6. ¬P(n)
. . . . 7. m>n
. . . . ⊢  P(n+m-n)  by ArithSimp 0 THEN StrongAuto
END
```