```
tc_ioa_inv_vc  THM

⊢  ∀A:ioa{i:l}(), I:Fmla, de:sig().
|  tc_ioa(A;de)
|  ⇒
|  tc_pred(I;A.ds;<>;de)
|  ⇒
|  covers_pred(A;I)
|  ⇒
|  closed_pred(I)
|  ⇒
|  single_valued_decls(A.ds) ⇒ tc_vcs{i}(VCs(A;I);A.ds;A.da;de)
| by Auto THEN Unfolds ``tc_vcs ioa_inv_vc`` 0 THEN D 0 THENM D 0

|    THENA Auto
|
|\
| 1. A : ioa{i:l}()
| 2. I : Fmla
| 3. de : sig()
| 4. tc_ioa(A;de)
| 5. tc_pred(I;A.ds;<>;de)
| 6. covers_pred(A;I)
| 7. closed_pred(I)
| 8. single_valued_decls(A.ds)
| 9. v : vc{i:l}()
| 10. v ∈ <*vc_imp(mk_imp(A.init, I))*> +* ioa_trans_all{i}(A;I)
| ⊢  tc_vc(v;A.ds;A.da;de)
| | by Unfolds ``vcs_singleton vcs_add`` (-1) THEN
|
| |    RW ColMemberC (-1) THENA Auto
| THEN D (-1)
| |
| |\
| | 1. A : ioa{i:l}()
| | 2. I : Fmla
| | 3. de : sig()
| | 4. tc_ioa(A;de)
| | 5. tc_pred(I;A.ds;<>;de)
| | 6. covers_pred(A;I)
| | 7. closed_pred(I)
| | 8. single_valued_decls(A.ds)
| | 9. v : vc{i:l}()
| | 10. v = vc_imp(mk_imp(A.init, I))
| | ⊢  tc_vc(v;A.ds;A.da;de)
| |   by HypSubst (-1) 0 THENA Auto
| |
| |      ...
| | THEN Auto
| |
| .\
| . 1. A : ioa{i:l}()
| . 2. I : Fmla
| . 3. de : sig()
| . 4. tc_ioa(A;de)
```

```
| . 5. tc_pred(I;A.ds;<>;de)
| . 6. covers_pred(A;I)
| . 7. closed_pred(I)
| . 8. single_valued_decls(A.ds)
| . 9. v : vc{i:l}()
| . 10. v ∈ ioa_trans_all{i}(A;I)
| . ⊢  tc_vc(v;A.ds;A.da;de)
| . | by All (Unfold ‘ioa_trans_all‘)
| .
| . |    THEN RWW "member_col_map" (-1) THENM ExRepD
| .
| . |    THENM HypSubst (-1) 0
| . THENA Auto
| . |
| . |
| . |\
| . | .....subterm .....
| . | 1. A : ioa{i:l}()
| . | 2. I : Fmla
| . | 3. de : sig()
| . | 4. tc_ioa(A;de)
| . | 5. tc_pred(I;A.ds;<>;de)
| . | 6. covers_pred(A;I)
| . | 7. closed_pred(I)
| . | 8. single_valued_decls(A.ds)
| . | 9. v : vc{i:l}()
| . | 10. v ∈ <ioa_trans(A;a.lbl;I) | a ∈ A.da>
| . | ⊢  A ∈ ioa{i':l}  by BackThruLemma ‘ioa_univ_lemma‘ THEN Auto
| . |
| . .\
| . . 1. A : ioa{i:l}()
| . . 2. I : Fmla
| . . 3. de : sig()
| . . 4. tc_ioa(A;de)
| . . 5. tc_pred(I;A.ds;<>;de)
| . . 6. covers_pred(A;I)
| . . 7. closed_pred(I)
| . . 8. single_valued_decls(A.ds)
| . . 9. v : vc{i:l}()
| . . 10. a : dec()
| . . 11. a ∈ A.da
| . . 12. v = ioa_trans(A;a.lbl;I)
| . . ⊢  tc_vc(ioa_trans(A;a.lbl;I);A.ds;A.da;de)
| . . | by Thin (-1) THEN Unfolds ‘‘tc_vc ioa_trans‘‘ 0 THEN Reduce 0
| . . |
| . . THEN D 0
| . . |
| . . |\
| . . | 1. A : ioa{i:l}()
| . . | 2. I : Fmla
| . . | 3. de : sig()
| . . | 4. tc_ioa(A;de)
| . . | 5. tc_pred(I;A.ds;<>;de)
| . . | 6. covers_pred(A;I)
| . . | 7. closed_pred(I)
```

```
| . . | 8. single_valued_decls(A.ds)
| . . | 9. vc{i:l}()
| . . | 10. a : dec()
| . . | 11. a ∈ A.da
| . . | ⊢  tc_pred(I
| . . | |  ∧ action_pre(a.lbl;A.pre);A.ds;dec_lookup(A.da;a.lbl);de)
| . . | | by All (Unfolds ``tc_ioa tc_pred closed_pred``) THEN ExRepD
| . . | |
| . . | THENA (Auto THEN Try (Fold `pred` 0 THEN Auto))
| . . | |
| . . | 1. A : ioa{i:l}()
| . . | 2. I : Fmla
| . . | 3. de : sig()
| . . | 4. tc_pred(A.init;A.ds;<>;de)
| . . | 5. ∀p:pre().
| . . | |  p ∈ A.pre ⇒ tc(p.rel;A.ds;dec_lookup(A.da;p.kind);de)
| . . | 6. ∀ef:eff().
| . . | |  ef ∈ A.eff
| . . | |  ⇒
| . . | |  mk_dec(ef.kind, ef.typ) ∈ A.da & tc_eff(ef;A.ds;de)
| . . | 7. ∀f:frame(). f ∈ A.frame ⇒ mk_dec(f.var, f.typ) ∈ A.ds
| . . | 8. ∀r:rel(). r ∈ I ⇒ tc(r;A.ds;<>;de)
| . . | 9. covers_pred(A;I)
| . . | 10. ∀r:rel(). r ∈ I ⇒ closed_rel(r)
| . . | 11. single_valued_decls(A.ds)
| . . | 12. vc{i:l}()
| . . | 13. a : dec()
| . . | 14. a ∈ A.da
| . . | 15. r : rel()
| . . | 16. r ∈ I ∧ action_pre(a.lbl;A.pre)
| . . | ⊢  tc(r;A.ds;dec_lookup(A.da;a.lbl);de)
| . . | | by Unfold `pred_and` (-1) THEN RWW "member_col_add" (-1)
| . . |
| . . | |    THENM D (-1)
| . . |
| . . | |    THENA (Auto THEN Try (Fold `pred` 0 THEN Auto))
| . . | |
| . . | |\
| . . | | 1. A : ioa{i:l}()
| . . | | 2. I : Fmla
| . . | | 3. de : sig()
| . . | | 4. tc_pred(A.init;A.ds;<>;de)
| . . | | 5. ∀p:pre().
| . . | |    p ∈ A.pre ⇒ tc(p.rel;A.ds;dec_lookup(A.da;p.kind);de)
| . . | | 6. ∀ef:eff().
| . . | |    ef ∈ A.eff
| . . | |    ⇒
| . . | |    mk_dec(ef.kind, ef.typ) ∈ A.da & tc_eff(ef;A.ds;de)
| . . | | 7. ∀f:frame(). f ∈ A.frame ⇒ mk_dec(f.var, f.typ) ∈ A.ds
| . . | | 8. ∀r:rel(). r ∈ I ⇒ tc(r;A.ds;<>;de)
| . . | | 9. covers_pred(A;I)
| . . | | 10. ∀r:rel(). r ∈ I ⇒ closed_rel(r)
| . . | | 11. single_valued_decls(A.ds)
| . . | | 12. vc{i:l}()
| . . | | 13. a : dec()
```

```
| . . | | 14. a ∈ A.da
| . . | | 15. r : rel()
| . . | | 16. r ∈ I
| . . | | ⊢  tc(r;A.ds;dec_lookup(A.da;a.lbl);de)
| . . | |   by InstHyp [r] (-9) THENM
| . . | | InstHyp [r] (-8) THENM
| . . | |
| . . | |      Using [‘da1’,<>] (BackThruLemma ‘tc_closed_rel‘)
| . . | |
| . . | |      THEN Auto
| . . | |
| . . | .\
| . . | . 1. A : ioa{i:l}()
| . . | . 2. I : Fmla
| . . | . 3. de : sig()
| . . | . 4. tc_pred(A.init;A.ds;<>;de)
| . . | . 5. ∀p:pre().
| . . | . |  p ∈ A.pre ⇒ tc(p.rel;A.ds;dec_lookup(A.da;p.kind);de)
| . . | . 6. ∀ef:eff().
| . . | . |  ef ∈ A.eff
| . . | . |  ⇒
| . . | . |  mk_dec(ef.kind, ef.typ) ∈ A.da & tc_eff(ef;A.ds;de)
| . . | . 7. ∀f:frame(). f ∈ A.frame ⇒ mk_dec(f.var, f.typ) ∈ A.ds
| . . | . 8. ∀r:rel(). r ∈ I ⇒ tc(r;A.ds;<>;de)
| . . | . 9. covers_pred(A;I)
| . . | . 10. ∀r:rel(). r ∈ I ⇒ closed_rel(r)
| . . | . 11. single_valued_decls(A.ds)
| . . | . 12. vc{i:l}()
| . . | . 13. a : dec()
| . . | . 14. a ∈ A.da
| . . | . 15. r : rel()
| . . | . 16. r ∈ action_pre(a.lbl;A.pre)
| . . | . ⊢  tc(r;A.ds;dec_lookup(A.da;a.lbl);de)
| . . | . | by Unfold ‘action_pre‘ (-1) THEN
| . . | .
| . . | . |    RWW "member_col_map" (-1) THENM
| . . | .
| . . | . |    RWW "member_col_filter" (-1) THENM
| . . | . ExRepD THENM
| . . | .
| . . | . |    SubstFor r 0
| . . | . THENA Auto
| . . | . |
| . . | . 1. A : ioa{i:l}()
| . . | . 2. I : Fmla
| . . | . 3. de : sig()
| . . | . 4. tc_pred(A.init;A.ds;<>;de)
| . . | . 5. ∀p:pre().
| . . | . |  p ∈ A.pre ⇒ tc(p.rel;A.ds;dec_lookup(A.da;p.kind);de)
| . . | . 6. ∀ef:eff().
| . . | . |  ef ∈ A.eff
| . . | . |  ⇒
| . . | . |  mk_dec(ef.kind, ef.typ) ∈ A.da & tc_eff(ef;A.ds;de)
| . . | . 7. ∀f:frame(). f ∈ A.frame ⇒ mk_dec(f.var, f.typ) ∈ A.ds
| . . | . 8. ∀r:rel(). r ∈ I ⇒ tc(r;A.ds;<>;de)
```

```
| . . | . 9. covers_pred(A;I)
| . . | . 10. ∀r:rel(). r ∈ I ⇒ closed_rel(r)
| . . | . 11. single_valued_decls(A.ds)
| . . | . 12. vc{i:l}()
| . . | . 13. a : dec()
| . . | . 14. a ∈ A.da
| . . | . 15. r : rel()
| . . | . 16. p : pre()
| . . | . 17. p ∈ A.pre
| . . | . 18. p.kind =1 a.lbl
| . . | . 19. r = p.rel
| . . | . ⊢  tc(p.rel;A.ds;dec_lookup(A.da;a.lbl);de)
| . . | . | by Subst a.lbl ∼ p.kind 0  THENA Auto
| . . | . |
| . . | . |\
| . . | . | 1. A : ioa{i:l}()
| . . | . | 2. I : Fmla
| . . | . | 3. de : sig()
| . . | . | 4. tc_pred(A.init;A.ds;<>;de)
| . . | . | 5. ∀p:pre().
| . . | . |    p ∈ A.pre ⇒ tc(p.rel;A.ds;dec_lookup(A.da;p.kind);de)
| . . | . | 6. ∀ef:eff().
| . . | . |    ef ∈ A.eff
| . . | . |    ⇒
| . . | . |    mk_dec(ef.kind, ef.typ) ∈ A.da & tc_eff(ef;A.ds;de)
| . . | . | 7. ∀f:frame(). f ∈ A.frame ⇒ mk_dec(f.var, f.typ) ∈ A.ds
| . . | . | 8. ∀r:rel(). r ∈ I ⇒ tc(r;A.ds;<>;de)
| . . | . | 9. covers_pred(A;I)
| . . | . | 10. ∀r:rel(). r ∈ I ⇒ closed_rel(r)
| . . | . | 11. single_valued_decls(A.ds)
| . . | . | 12. vc{i:l}()
| . . | . | 13. a : dec()
| . . | . | 14. a ∈ A.da
| . . | . | 15. r : rel()
| . . | . | 16. p : pre()
| . . | . | 17. p ∈ A.pre
| . . | . | 18. p.kind =1 a.lbl
| . . | . | 19. r = p.rel
| . . | . | ⊢  a.lbl = p.kind  by EqLblFwd THEN Auto
| . . | . |
| . . | . .\
| . . | . . 1. A : ioa{i:l}()
| . . | . . 2. I : Fmla
| . . | . . 3. de : sig()
| . . | . . 4. tc_pred(A.init;A.ds;<>;de)
| . . | . . 5. ∀p:pre().
| . . | . .    p ∈ A.pre ⇒ tc(p.rel;A.ds;dec_lookup(A.da;p.kind);de)
| . . | . . 6. ∀ef:eff().
| . . | . .    ef ∈ A.eff
| . . | . .    ⇒
| . . | . .    mk_dec(ef.kind, ef.typ) ∈ A.da & tc_eff(ef;A.ds;de)
| . . | . . 7. ∀f:frame(). f ∈ A.frame ⇒ mk_dec(f.var, f.typ) ∈ A.ds
| . . | . . 8. ∀r:rel(). r ∈ I ⇒ tc(r;A.ds;<>;de)
| . . | . . 9. covers_pred(A;I)
| . . | . . 10. ∀r:rel(). r ∈ I ⇒ closed_rel(r)
```

```
| . . | . . 11. single_valued_decls(A.ds)
| . . | . . 12. vc{i:l}()
| . . | . . 13. a : dec()
| . . | . . 14. a ∈ A.da
| . . | . . 15. r : rel()
| . . | . . 16. p : pre()
| . . | . . 17. p ∈ A.pre
| . . | . . 18. p.kind =1 a.lbl
| . . | . . 19. r = p.rel
| . . | . . ⊢  tc(p.rel;A.ds;dec_lookup(A.da;p.kind);de)
| . . | . .   by BackThruSomeHyp THEN Auto
| . . |
| . . .\
| . . . 1. A : ioa{i:l}()
| . . . 2. I : Fmla
| . . . 3. de : sig()
| . . . 4. tc_ioa(A;de)
| . . . 5. tc_pred(I;A.ds;<>;de)
| . . . 6. covers_pred(A;I)
| . . . 7. closed_pred(I)
| . . . 8. single_valued_decls(A.ds)
| . . . 9. vc{i:l}()
| . . . 10. a : dec()
| . . . 11. a ∈ A.da
| . . . ⊢  tc_pred(smts_eff_pred(...;I);A.ds;dec_lookup(A.da;...);de)
| . . . | by ...
| . . . |
| . . . 1. A : ioa{i:l}()
| . . . 2. I : Fmla
| . . . 3. de : sig()
| . . . 4. tc_ioa(A;de)
| . . . 5. tc_pred(I;A.ds;<>;de)
| . . . 6. covers_pred(A;I)
| . . . 7. closed_pred(I)
| . . . 8. single_valued_decls(A.ds)
| . . . 9. vc{i:l}()
| . . . 10. a : dec()
| . . . 11. a ∈ A.da
| . . . 12. r : rel()
| . . . 13. r ∈ smts_eff_pred(action_effect(a.lbl;A.eff;A.frame);I)
| . . . ⊢  tc(r;A.ds;dec_lookup(A.da;a.lbl);de)
| . . . | by Unfold `smts_eff_pred` (-1) THEN
| . . . Using [`T`,rel()
| . . . |    ] (FwdThruLemma `member_col_accum` [(-1)])
| . . . THENM ExRepD
| . . . |
| . . . THENM Unfold `smts_eff_rel` (-1)
| . . .
| . . . |    THENM RWW "member_col_subst" (-1)
| . . . THENM ExRepD
| . . .
| . . . |    THENM HypSubst (-1) 0
| . . .
| . . . |    THENA (Auto THEN Try (Fold `pred` 0 THEN Auto))
| . . . |
```

```
| . . . 1. A : ioa{i:l}()
| . . . 2. I : Fmla
| . . . 3. de : sig()
| . . . 4. tc_ioa(A;de)
| . . . 5. tc_pred(I;A.ds;<>;de)
| . . . 6. covers_pred(A;I)
| . . . 7. closed_pred(I)
| . . . 8. single_valued_decls(A.ds)
| . . . 9. vc{i:l}()
| . . . 10. a : dec()
| . . . 11. a ∈ A.da
| . . . 12. r : rel()
| . . . 13. r ∈ (∪r∈I.smts_eff_rel(action_effect(a.lbl;A.eff;...);r))
| . . . 14. r1 : rel()
| . . . 15. r1 ∈ I
| . . . 16. as : (Label×Term) List
| . . . 17. 1of(unzip(as)) = rel_vars(r1)
| . . . 18. ∀i:ℕ.
| . . . |   i<||as||
| . . . |   ⇒
| . . . |   2of(as[i]) ∈ (λx.
| . . . |                 smts_eff(action_effect(a.lbl;A.eff;...);x))
| . . . |               (1of(as[i]))
| . . . 19. r = rel_subst(as;r1)
| . . . ⊢  tc(rel_subst(as;r1);A.ds;dec_lookup(A.da;a.lbl);de)
| . . . | by BackThruLemma ‘rel_subst_tc‘ THEN Auto
| . . . |
| . . . |\
| . . . | 1. A : ioa{i:l}()
| . . . | 2. I : Fmla
| . . . | 3. de : sig()
| . . . | 4. tc_ioa(A;de)
| . . . | 5. tc_pred(I;A.ds;<>;de)
| . . . | 6. covers_pred(A;I)
| . . . | 7. closed_pred(I)
| . . . | 8. single_valued_decls(A.ds)
| . . . | 9. vc{i:l}()
| . . . | 10. a : dec()
| . . . | 11. a ∈ A.da
| . . . | 12. r : rel()
| . . . | 13. r ∈ (∪r∈I.smts_eff_rel(action_effect(a.lbl;...;...);r))
| . . . | 14. r1 : rel()
| . . . | 15. r1 ∈ I
| . . . | 16. as : (Label×Term) List
| . . . | 17. 1of(unzip(as)) = rel_vars(r1)
| . . . | 18. ∀i:ℕ.
| . . . |     i<||as||
| . . . |     ⇒
| . . . |     2of(as[i]) ∈ ...
| . . . |                 (1of(as[i]))
| . . . | 19. r = rel_subst(as;r1)
| . . . | ⊢  tc(r1;A.ds;dec_lookup(A.da;a.lbl);de)
| . . . |   by ...r1] i THENA Auto)
| . . . | THEN Using [‘da1’,<>
| . . . |      ] (BackThruLemma ‘tc_closed_rel‘) THEN Auto
```

```
| . . . |
| . . . .\
| . . . . 1. A : ioa{i:l}()
| . . . . 2. I : Fmla
| . . . . 3. de : sig()
| . . . . 4. tc_ioa(A;de)
| . . . . 5. tc_pred(I;A.ds;<>;de)
| . . . . 6. covers_pred(A;I)
| . . . . 7. closed_pred(I)
| . . . . 8. single_valued_decls(A.ds)
| . . . . 9. vc{i:l}()
| . . . . 10. a : dec()
| . . . . 11. a ∈ A.da
| . . . . 12. r : rel()
| . . . . 13. r ∈ (∪r∈I.smts_eff_rel(action_effect(a.lbl;...;...);r))
| . . . . 14. r1 : rel()
| . . . . 15. r1 ∈ I
| . . . . 16. as : (Label×Term) List
| . . . . 17. 1of(unzip(as)) = rel_vars(r1)
| . . . . 18. ∀i:ℕ.
| . . . . |   i<||as||
| . . . . |   ⇒
| . . . . |   2of(as[i]) ∈ ...
| . . . . |                (1of(as[i]))
| . . . . 19. r = rel_subst(as;r1)
| . . . . 20. x : Label
| . . . . 21. (x ∈ rel_vars(r1))
| . . . . 22. t : SimpleType
| . . . . 23. mk_dec(x, t) ∈ A.ds
| . . . . ⊢  t ∈ term_types(A.ds;dec_lookup(A.da;a.lbl);de;...)
| . . . . | by BackThruLemma ‘tc_ioa_lemma‘ THEN Auto
| . . . . |
| . . . . 1. A : ioa{i:l}()
| . . . . 2. I : Fmla
| . . . . 3. de : sig()
| . . . . 4. tc_ioa(A;de)
| . . . . 5. tc_pred(I;A.ds;<>;de)
| . . . . 6. covers_pred(A;I)
| . . . . 7. closed_pred(I)
| . . . . 8. single_valued_decls(A.ds)
| . . . . 9. vc{i:l}()
| . . . . 10. a : dec()
| . . . . 11. a ∈ A.da
| . . . . 12. r : rel()
| . . . . 13. r ∈ (∪r∈I.smts_eff_rel(action_effect(a.lbl;...;...);r))
| . . . . 14. r1 : rel()
| . . . . 15. r1 ∈ I
| . . . . 16. as : (Label×Term) List
| . . . . 17. 1of(unzip(as)) = rel_vars(r1)
| . . . . 18. ∀i:ℕ.
| . . . .     i<||as||
| . . . .     ⇒
| . . . .     2of(as[i]) ∈ ...
| . . . .                  (1of(as[i]))
| . . . . 19. r = rel_subst(as;r1)
```

```
| . . . . 20. x : Label
| . . . . 21. (x ∈ rel_vars(r1))
| . . . . 22. t : SimpleType
| . . . . 23. mk_dec(x, t) ∈ A.ds
| . . . . 24. i : ℕ
| . . . . 25. i<||as||
| . . . . ⊢  2of(as[i]) ∈ smts_eff(action_effect(a.lbl;A.eff;...);...)
| . . . .   by All Reduce THEN BackThruSomeHyp THEN Auto
|
.\
. .....subterm .....
. 1. A : ioa{i:l}()
. 2. I : Fmla
. 3. de : sig()
. 4. tc_ioa(A;de)
. 5. tc_pred(I;A.ds;<>;de)
. 6. covers_pred(A;I)
. 7. closed_pred(I)
. 8. single_valued_decls(A.ds)
. 9. vc{i:l}()
. ⊢  (<*vc_imp(mk_imp(A.init, I))*> +* ioa_trans_all{i}(A;I))
.    ∈ Collection(vc{i:l}())  by Fold `vcs` 0 THEN Auto
END
```