```
rel_plus_implies  THM

⊢  ∀T:Type, R:(T→T→Prop), x,y:T.
|  (x R^+ y) ⇒ (x R y) ∨ (∃z:T. (x R^+ z) & (z R y))
| by Auto THEN Unfold `rel_plus` -1 THEN Reduce -1 THEN ExRepD
|    THEN
|    MoveToConcl -1
|    THEN
|    MoveToConcl -2
|    THEN
|    MoveToConcl -2
|    THEN
|    NatPlusInd -1
|
|\
| 1. T : Type
| 2. R : T→T→Prop
| 3. n : ℤ
| 4. 0<n
| 5. 0<n-1
| |  ⇒
| |  (∀x,y:T. (x R^n-1 y) ⇒ (x R y) ∨ (∃z:T. (x R^+ z) & (z R y)))
| 6. n = 1
| 7. 0<1
| 8. x : T
| 9. y : T
| 10. x R^1 y
| ⊢  (x R y) ∨ (∃z:T. (x R^+ z) & (z R y))
| | by OrLeft THEN RecUnfold `rel_exp` -1 THEN Reduce -1
| |    THEN
| |    RecUnfold `rel_exp` -1
| |    THEN
| |    Reduce -1
| |    THEN
| |    ExRepD
| |
| 1. T : Type
| 2. R : T→T→Prop
| 3. n : ℤ
| 4. 0<n
| 5. 0<n-1
|    ⇒
|    (∀x,y:T. (x R^n-1 y) ⇒ (x R y) ∨ (∃z:T. (x R^+ z) & (z R y)))
| 6. n = 1
| 7. 0<1
| 8. x : T
| 9. y : T
| 10. z : T
| 11. x R z
| 12. z = y
| ⊢  x R y  by RevHypSubst -1 0
|
.\
. 1. T : Type
. 2. R : T→T→Prop
```

```
. 3. n : ℤ
. 4. 0<n
. 5. 0<n-1
. |  ⇒
. |  (∀x,y:T. (x R^n-1 y) ⇒ (x R y) ∨ (∃z:T. (x R^+ z) & (z R y)))
. 6. ¬n = 1
. 7. 0<n
. 8. x : T
. 9. y : T
. 10. x R^n y
. ⊢  (x R y) ∨ (∃z:T. (x R^+ z) & (z R y))  by OrRight
. |
. 1. T : Type
. 2. R : T→T→Prop
. 3. n : ℤ
. 4. 0<n
. 5. 0<n-1
. |  ⇒
. |  (∀x,y:T. (x R^n-1 y) ⇒ (x R y) ∨ (∃z:T. (x R^+ z) & (z R y)))
. 6. ¬n = 1
. 7. 0<n
. 8. x : T
. 9. y : T
. 10. x R^n y
. ⊢  ∃z:T. (x R^+ z) & (z R y)
. | by MoveToConcl -1 THEN RecUnfold ‘rel_exp‘ 0 THEN SplitOnConclITE
. |    THEN
. |    Reduce 0
. |    THEN
. |    ExRepD
. |
. 1. T : Type
. 2. R : T→T→Prop
. 3. n : ℤ
. 4. 0<n
. 5. 0<n-1
. |  ⇒
. |  (∀x,y:T. (x R^n-1 y) ⇒ (x R y) ∨ (∃z:T. (x R^+ z) & (z R y)))
. 6. ¬n = 1
. 7. 0<n
. 8. x : T
. 9. y : T
. 10. ¬n = 0
. 11. z : T
. 12. x R z
. 13. z R^n-1 y
. ⊢  ∃z:T. (x R^+ z) & (z R y)  by Analyze 5

. |
. 1. T : Type
. 2. R : T→T→Prop
. 3. n : ℤ
. 4. 0<n
. 5. ¬n = 1
. 6. 0<n
. 7. x : T
```

```
. 8. y : T
. 9. ¬n = 0
. 10. z : T
. 11. x R z
. 12. z R^n-1 y
. 13. ∀x,y:T. (x R^n-1 y) ⇒ (x R y) ∨ (∃z:T. (x R^+ z) & (z R y))
. ⊢  ∃z:T. (x R^+ z) & (z R y)  by InstHyp [z;y] -1 THEN SplitOrHyps
. |
. |\
. | 1. T : Type
. | 2. R : T→T→Prop
. | 3. n : ℤ
. | 4. 0<n
. | 5. ¬n = 1
. | 6. 0<n
. | 7. x : T
. | 8. y : T
. | 9. ¬n = 0
. | 10. z : T
. | 11. x R z
. | 12. z R^n-1 y
. | 13. ∀x,y:T. (x R^n-1 y) ⇒ (x R y) ∨ (∃z:T. (x R^+ z) & (z R y))
. | 14. z R y
. | ⊢  ∃z:T. (x R^+ z) & (z R y)  by InstConcl [z]
. | |
. | 1. T : Type
. | 2. R : T→T→Prop
. | 3. n : ℤ
. | 4. 0<n
. | 5. ¬n = 1
. | 6. 0<n
. | 7. x : T
. | 8. y : T
. | 9. ¬n = 0
. | 10. z : T
. | 11. x R z
. | 12. z R^n-1 y
. | 13. ∀x,y:T. (x R^n-1 y) ⇒ (x R y) ∨ (∃z:T. (x R^+ z) & (z R y))
. | 14. z R y
. | ⊢  x R^+ z
. | | by Unfold ‘rel_plus‘ 0 THEN Reduce 0 THEN InstConcl [1]
. | |    THEN
. | |    Reduce 0
. | |
. | 1. T : Type
. | 2. R : T→T→Prop
. | 3. n : ℤ
. | 4. 0<n
. | 5. ¬n = 1
. | 6. 0<n
. | 7. x : T
. | 8. y : T
. | 9. ¬n = 0
. | 10. z : T
. | 11. x R z
```

```
. | 12. z R^n-1 y
. | 13. ∀x,y:T. (x R^n-1 y) ⇒ (x R y) ∨ (∃z:T. (x R^+ z) & (z R y))
. | 14. z R y
. | ⊢  x R^1 z
. |   by RecUnfold ‘rel_exp‘ 0 THEN Reduce 0 THEN InstConcl [z]
. |      THEN
. |      RecUnfold ‘rel_exp‘ 0
. |      THEN
. |      Reduce 0
. |
. .\
. . 1. T : Type
. . 2. R : T→T→Prop
. . 3. n : ℤ
. . 4. 0<n
. . 5. ¬n = 1
. . 6. 0<n
. . 7. x : T
. . 8. y : T
. . 9. ¬n = 0
. . 10. z : T
. . 11. x R z
. . 12. z R^n-1 y
. . 13. ∀x,y:T. (x R^n-1 y) ⇒ (x R y) ∨ (∃z:T. (x R^+ z) & (z R y))
. . 14. ∃z@0:T. (z R^+ z@0) & (z@0 R y)
. . ⊢  ∃z:T. (x R^+ z) & (z R y)  by RepeatFor 2 (ParallelOp -1)
. . |
. . 1. T : Type
. . 2. R : T→T→Prop
. . 3. n : ℤ
. . 4. 0<n
. . 5. ¬n = 1
. . 6. 0<n
. . 7. x : T
. . 8. y : T
. . 9. ¬n = 0
. . 10. z : T
. . 11. x R z
. . 12. z R^n-1 y
. . 13. ∀x,y:T. (x R^n-1 y) ⇒ (x R y) ∨ (∃z:T. (x R^+ z) & (z R y))
. . 14. z@0 : T
. . 15. z R^+ z@0
. . ⊢  x R^+ z@0
. . | by All (Unfold ‘rel_plus‘) THEN All Reduce THEN ExRepD
. . |
. . 1. T : Type
. . 2. R : T→T→Prop
. . 3. n : ℤ
. . 4. 0<n
. . 5. ¬n = 1
. . 6. 0<n
. . 7. x : T
. . 8. y : T
. . 9. ¬n = 0
. . 10. z : T
```

```
. . 11. x R z
. . 12. z R^n-1 y
. . 13. ∀x,y:T.
. . |    (x R^n-1 y) ⇒ (x R y) ∨ (∃z:T. (∃n:ℕ+. x R^n z) & (z R y))
. . 14. z@0 : T
. . 15. n1 : ℕ+
. . 16. z R^n1 z@0
. . ⊢  ∃n:ℕ+. x R^n z@0  by InstConcl [n1+1]
. . |
. . 1. T : Type
. . 2. R : T→T→Prop
. . 3. n : ℤ
. . 4. 0<n
. . 5. ¬n = 1
. . 6. 0<n
. . 7. x : T
. . 8. y : T
. . 9. ¬n = 0
. . 10. z : T
. . 11. x R z
. . 12. z R^n-1 y
. . 13. ∀x,y:T.
. . |    (x R^n-1 y) ⇒ (x R y) ∨ (∃z:T. (∃n:ℕ+. x R^n z) & (z R y))
. . 14. z@0 : T
. . 15. n1 : ℕ+
. . 16. z R^n1 z@0
. . ⊢  x R^n1+1 z@0
. . | by RecUnfold `rel_exp` 0 THEN SplitOnConclITE THEN Reduce 0
. . |
. . 1. T : Type
. . 2. R : T→T→Prop
. . 3. n : ℤ
. . 4. 0<n
. . 5. ¬n = 1
. . 6. 0<n
. . 7. x : T
. . 8. y : T
. . 9. ¬n = 0
. . 10. z : T
. . 11. x R z
. . 12. z R^n-1 y
. . 13. ∀x,y:T.
. . |    (x R^n-1 y) ⇒ (x R y) ∨ (∃z:T. (∃n:ℕ+. x R^n z) & (z R y))
. . 14. z@0 : T
. . 15. n1 : ℕ+
. . 16. z R^n1 z@0
. . 17. ¬n1+1 = 0
. . ⊢  ∃z:T. (x R z) & (z R^n1+1-1 z@0)  by InstConcl [z]
. . |
. . 1. T : Type
. . 2. R : T→T→Prop
. . 3. n : ℤ
. . 4. 0<n
. . 5. ¬n = 1
. . 6. 0<n
```

```
. . 7. x : T
. . 8. y : T
. . 9. ¬n = 0
. . 10. z : T
. . 11. x R z
. . 12. z R^n-1 y
. . 13. ∀x,y:T.
. .     (x R^n-1 y) ⇒ (x R y) ∨ (∃z:T. (∃n:ℕ+. x R^n z) & (z R y))
. . 14. z@0 : T
. . 15. n1 : ℕ+
. . 16. z R^n1 z@0
. . 17. ¬n1+1 = 0
. . ⊢  z R^n1+1-1 z@0  by Subst' (n1+1-1 = n1) 0
END
```