alle-at-iff THM

```
⊢  ∀es:ES, i:Id, P:({e:E| loc(e) = i }→Prop).
|  ∀e@i.P(e)
|  ⟺
|  ∀e@i.first(e) ⇒ P(e) & ∀e@i.¬first(e) ⇒ P(pred(e)) ⇒ P(e)
| by Auto
|
|\
| 1. es : ES
| 2. i : Id
| 3. P : {e:E| loc(e) = i }→Prop
| 4. ∀e@i.P(e)
| ⊢  ∀e@i.first(e) ⇒ P(e)  by RepeatFor 3 (ParallelOp -1)
|
|\
| 1. es : ES
| 2. i : Id
| 3. P : {e:E| loc(e) = i }→Prop
| 4. ∀e@i.P(e)
| ⊢  ∀e@i.¬first(e) ⇒ P(pred(e)) ⇒ P(e)
|   by RepeatFor 3 (ParallelOp -1) THEN Analyze THEN EsAuto
|
|\
| 1. es : ES
| 2. i : Id
| 3. P : {e:E| loc(e) = i }→Prop
| 4. ∀e@i.first(e) ⇒ P(e)
| 5. ∀e@i.¬first(e) ⇒ P(pred(e)) ⇒ P(e)
| ⊢  ∀e@i.P(e)  by All (Unfold `alle-at`) THEN LocLessInd
| |
| 1. es : ES
| 2. i : Id
| 3. P : {e:E| loc(e) = i }→Prop
| 4. ∀e:E. loc(e) = i ⇒ first(e) ⇒ P(e)
| 5. ∀e:E. loc(e) = i ⇒ ¬first(e) ⇒ P(pred(e)) ⇒ P(e)
| 6. WellFnd{i}(E;x,y.(x <loc y))
| 7. j : E
| 8. ∀k:E. (k <loc j) ⇒ loc(k) = i ⇒ P(k)
| 9. loc(j) = i
| ⊢  P(j)  by Decide first(j)
| |
| |\
| | 1. es : ES
| | 2. i : Id
| | 3. P : {e:E| loc(e) = i }→Prop
| | 4. ∀e:E. loc(e) = i ⇒ first(e) ⇒ P(e)
| | 5. ∀e:E. loc(e) = i ⇒ ¬first(e) ⇒ P(pred(e)) ⇒ P(e)
| | 6. WellFnd{i}(E;x,y.(x <loc y))
| | 7. j : E
| | 8. ∀k:E. (k <loc j) ⇒ loc(k) = i ⇒ P(k)
| | 9. loc(j) = i
| | 10. first(j)
| | ⊢  P(j)  by BackThru 4
| |
```

```
| .\
| . 1. es : ES
| . 2. i : Id
| . 3. P : {e:E| loc(e) = i }→Prop
| . 4. ∀e:E. loc(e) = i ⇒ first(e) ⇒ P(e)
| . 5. ∀e:E. loc(e) = i ⇒ ¬first(e) ⇒ P(pred(e)) ⇒ P(e)
| . 6. WellFnd{i}(E;x,y.(x <loc y))
| . 7. j : E
| . 8. ∀k:E. (k <loc j) ⇒ loc(k) = i ⇒ P(k)
| . 9. loc(j) = i
| . 10. ¬first(j)
| . ⊢  P(j)
| .   by BackThru 5 THEN EsAuto THEN BackThruSomeHyp THEN EsAuto
|
.\
. .....subterm .....
. 1. es : ES
. 2. i : Id
. 3. {e:E| loc(e) = i }→Prop
. 4. e : {e:E| loc(e) = i }
. 5. ¬first(e)
. ⊢  pred(e) ∈ {e:E| loc(e) = i }
.   by Analyze -2 THEN Analyze
.      THEN
.      RWO
.      Thm* ∀the_es:ES, e:E. ¬first(e) ⇒ loc(pred(e)) = loc(e) ∈ Id
.      {es_DASH_loc_DASH_pred}
.      0
END
```