```
es-first-exists  THM

⊢  ∀es:ES, e':E. ∃e:E. first(e) & e ≤ e'
| by Analyze 0 THEN LocLessInd
|
1. es : ES
2. WellFnd{i}(E;x,y.(x <loc y))
3. j : E
4. ∀k:E. (k <loc j) ⇒ (∃e:E. first(e) & e ≤ k )
⊢  ∃e:E. first(e) & e ≤ j   by Decide first(j)
|
|\
| 1. es : ES
| 2. WellFnd{i}(E;x,y.(x <loc y))
| 3. j : E
| 4. ∀k:E. (k <loc j) ⇒ (∃e:E. first(e) & e ≤ k )
| 5. first(j)
| ⊢  ∃e:E. first(e) & e ≤ j   by InstConcl [j]
| |
| 1. es : ES
| 2. WellFnd{i}(E;x,y.(x <loc y))
| 3. j : E
| 4. ∀k:E. (k <loc j) ⇒ (∃e:E. first(e) & e ≤ k )
| 5. first(j)
| ⊢  j ≤ j   by Unfold `es-le` 0 THEN OrRight
|
.\
. 1. es : ES
. 2. WellFnd{i}(E;x,y.(x <loc y))
. 3. j : E
. 4. ∀k:E. (k <loc j) ⇒ (∃e:E. first(e) & e ≤ k )
. 5. ¬first(j)
. ⊢  ∃e:E. first(e) & e ≤ j   by InstHyp [pred(j)] -2
. |
. |\
. | .....antecedent .....
. | 1. es : ES
. | 2. WellFnd{i}(E;x,y.(x <loc y))
. | 3. j : E
. | 4. ∀k:E. (k <loc j) ⇒ (∃e:E. first(e) & e ≤ k )
. | 5. ¬first(j)
. | ⊢  (pred(j) <loc j)
. |   by BackThru
. |      Thm* ∀the_es:ES, j:E. ¬first(j) ⇒ (pred(j) <loc j)
. |      {es_DASH_pred_DASH_locl}
. |
. .\
. . 1. es : ES
. . 2. WellFnd{i}(E;x,y.(x <loc y))
. . 3. j : E
. . 4. ∀k:E. (k <loc j) ⇒ (∃e:E. first(e) & e ≤ k )
. . 5. ¬first(j)
. . 6. ∃e:E. first(e) & e ≤ pred(j)
. . ⊢  ∃e:E. first(e) & e ≤ j   by RepeatFor 2 (ParallelOp -1)
. . |
```

```
. . 1. es : ES
. . 2. WellFnd{i}(E;x,y.(x <loc y))
. . 3. j : E
. . 4. ∀k:E. (k <loc j) ⇒ (∃e:E. first(e) & e ≤ k )
. . 5. ¬first(j)
. . 6. e : E
. . 7. e ≤ pred(j)
. . ⊢  e ≤ j
. . | by (Inst
. . |     Thm* ∀the_es:ES. Trans x,y:E. x ≤ y
. . |     {es_DASH_le_DASH_trans}
. . |     [es])
. . |    THEN
. . |    (UseTrans pred(j))
. . |
. . 1. es : ES
. . 2. WellFnd{i}(E;x,y.(x <loc y))
. . 3. j : E
. . 4. ∀k:E. (k <loc j) ⇒ (∃e:E. first(e) & e ≤ k )
. . 5. ¬first(j)
. . 6. e : E
. . 7. e ≤ pred(j)
. . 8. Trans x,y:E. x ≤ y
. . ⊢  pred(j) ≤ j   by Unfold ‘es-le‘ 0 THEN OrLeft
. . |
. . 1. es : ES
. . 2. WellFnd{i}(E;x,y.(x <loc y))
. . 3. j : E
. . 4. ∀k:E. (k <loc j) ⇒ (∃e:E. first(e) & e ≤ k )
. . 5. ¬first(j)
. . 6. e : E
. . 7. e ≤ pred(j)
. . 8. Trans x,y:E. x ≤ y
. . ⊢  (pred(j) <loc j)
. .   by BackThru
. .      Thm* ∀the_es:ES, j:E. ¬first(j) ⇒ (pred(j) <loc j)
. .      {es_DASH_pred_DASH_locl}
END
```