fpf-sub-functionality THM

```
⊢  ∀A,A':Type.
|  strong-subtype(A;A')
|  ⇒
|  (∀B:(A→Type), C:(A'→Type), eq:EqDecider(A), eq':EqDecider(A'),
|    f,g:a:A fp-> B(a). (∀a:A. B(a) ⊆r C(a)) ⇒ f ⊆ g ⇒ f ⊆ g)
| by Repeat (Analyze 0 THENA Complete Auto)
|    THEN
|    AssertBY (A ⊆r A') (Analyze 3 THEN Trivial)
|    THEN
|    AssertBY (eq' ∈ EqDecider(A))
|    (DoSubsume
|     THEN
|     BackThru
|     Thm* strong-subtype(A;B) ⇒ (EqDecider(B) ⊆r EqDecider(A))
|     {strong_DASH_subtype_DASH_deq_DASH_subtype})
|    THEN
|    Analyze 0 THENA (Auto THEN TrySubsume)
|    THEN
|    ParallelOp -1
|    THEN
|    Analyze 0
|    THEN
|    Analyze 0
|
|\
| 1. A : Type
| 2. A' : Type
| 3. strong-subtype(A;A')
| 4. B : A→Type
| 5. C : A'→Type
| 6. eq : EqDecider(A)
| 7. eq' : EqDecider(A')
| 8. f : a:A fp-> B(a)
| 9. g : a:A fp-> B(a)
| 10. A ⊆r A'
| 11. eq' ∈ EqDecider(A)
| 12. ∀a:A. B(a) ⊆r C(a)
| 13. ∀x:A. x ∈ dom(f) ⇒ x ∈ dom(g) & f(x) = g(x)
| 14. x : A
| 15. x ∈ dom(f)
| ⊢  x ∈ dom(g) & f(x) = g(x)  by Assert (x ∈ A)
| |
| |\
| | .....assertion .....
| | 1. A : Type
| | 2. A' : Type
| | 3. strong-subtype(A;A')
| | 4. B : A→Type
| | 5. C : A'→Type
| | 6. eq : EqDecider(A)
| | 7. eq' : EqDecider(A')
| | 8. f : a:A fp-> B(a)
| | 9. g : a:A fp-> B(a)
```

```
| | 10. A ⊆r A'
| | 11. eq' ∈ EqDecider(A)
| | 12. ∀a:A. B(a) ⊆r C(a)
| | 13. ∀x:A. x ∈ dom(f) ⇒ x ∈ dom(g) & f(x) = g(x)
| | 14. x : A
| | 15. x ∈ dom(f)
| | ⊢  x ∈ A
| |   by MoveToConcl -1
| |      THEN
| |      BackThru
| |      Thm* ∀eq:EqDecider(Y), f:x:X fp-> Top, x:Y.
| |           strong-subtype(X;Y) ⇒ x ∈ dom(f) ⇒ x ∈ X
| |      {fpf_DASH_dom_DASH_type2}
| |
| .\
| . 1. A : Type
| . 2. A' : Type
| . 3. strong-subtype(A;A')
| . 4. B : A→Type
| . 5. C : A'→Type
| . 6. eq : EqDecider(A)
| . 7. eq' : EqDecider(A')
| . 8. f : a:A fp-> B(a)
| . 9. g : a:A fp-> B(a)
| . 10. A ⊆r A'
| . 11. eq' ∈ EqDecider(A)
| . 12. ∀a:A. B(a) ⊆r C(a)
| . 13. ∀x:A. x ∈ dom(f) ⇒ x ∈ dom(g) & f(x) = g(x)
| . 14. x : A
| . 15. x ∈ dom(f)
| . 16. x ∈ A
| . ⊢  x ∈ dom(g) & f(x) = g(x)  by InstHyp [x] -4
| . |
| . |\
| . | .....antecedent .....
| . | 1. A : Type
| . | 2. A' : Type
| . | 3. strong-subtype(A;A')
| . | 4. B : A→Type
| . | 5. C : A'→Type
| . | 6. eq : EqDecider(A)
| . | 7. eq' : EqDecider(A')
| . | 8. f : a:A fp-> B(a)
| . | 9. g : a:A fp-> B(a)
| . | 10. A ⊆r A'
| . | 11. eq' ∈ EqDecider(A)
| . | 12. ∀a:A. B(a) ⊆r C(a)
| . | 13. ∀x:A. x ∈ dom(f) ⇒ x ∈ dom(g) & f(x) = g(x)
| . | 14. x : A
| . | 15. x ∈ dom(f)
| . | 16. x ∈ A
| . | ⊢  x ∈ dom(f)
| . |   by MoveToConcl -2
| . |      THEN
| . |      BackThru
```

```
| . |      Thm* ∀eq1,eq2:EqDecider(A), f:a:A fp-> Top, x:A.
| . |           x ∈ dom(f) ⇒ x ∈ dom(f)
| . |      {fpf_DASH_dom_functionality2}
| . |
| . .\
| . . 1. A : Type
| . . 2. A' : Type
| . . 3. strong-subtype(A;A')
| . . 4. B : A→Type
| . . 5. C : A'→Type
| . . 6. eq : EqDecider(A)
| . . 7. eq' : EqDecider(A')
| . . 8. f : a:A fp-> B(a)
| . . 9. g : a:A fp-> B(a)
| . . 10. A ⊆r A'
| . . 11. eq' ∈ EqDecider(A)
| . . 12. ∀a:A. B(a) ⊆r C(a)
| . . 13. ∀x:A. x ∈ dom(f) ⇒ x ∈ dom(g) & f(x) = g(x)
| . . 14. x : A
| . . 15. x ∈ dom(f)
| . . 16. x ∈ A
| . . 17. x ∈ dom(g) & f(x) = g(x)
| . . ⊢  x ∈ dom(g) & f(x) = g(x)  by Analyze -1 THEN Analyze 0
| . . |
| . . |\
| . . | 1. A : Type
| . . | 2. A' : Type
| . . | 3. strong-subtype(A;A')
| . . | 4. B : A→Type
| . . | 5. C : A'→Type
| . . | 6. eq : EqDecider(A)
| . . | 7. eq' : EqDecider(A')
| . . | 8. f : a:A fp-> B(a)
| . . | 9. g : a:A fp-> B(a)
| . . | 10. A ⊆r A'
| . . | 11. eq' ∈ EqDecider(A)
| . . | 12. ∀a:A. B(a) ⊆r C(a)
| . . | 13. ∀x:A. x ∈ dom(f) ⇒ x ∈ dom(g) & f(x) = g(x)
| . . | 14. x : A
| . . | 15. x ∈ dom(f)
| . . | 16. x ∈ A
| . . | 17. x ∈ dom(g)
| . . | 18. f(x) = g(x)
| . . | ⊢  x ∈ dom(g)
| . . |   by MoveToConcl -2
| . . |      THEN
| . . |      BackThru
| . . |      Thm* ∀eq1,eq2:EqDecider(A), f:a:A fp-> Top, x:A.
| . . |           x ∈ dom(f) ⇒ x ∈ dom(f)
| . . |      {fpf_DASH_dom_functionality2}
| . . |      THEN
| . . |      DoSubsume
| . . |      THEN
| . . |      Try
| . . |      (BackThru
```

```
| . . |       Thm* strong-subtype(A;B)
| . . |            ⇒
| . . |            (EqDecider(B) ⊆r EqDecider(A))
| . . |       {strong_DASH_subtype_DASH_deq_DASH_subtype})
| . . |      THEN
| . . |      Try
| . . |      (BackThru
| . . |       Thm* ∀B1:(A1→Type), B2:(A2→Type).
| . . |            strong-subtype(A1;A2)
| . . |            ⇒
| . . |            (∀a:A1. B1(a) ⊆r B2(a))
| . . |            ⇒
| . . |            (a:A1 fp-> B1(a) ⊆r a:A2 fp-> B2(a))
| . . |       {subtype_DASH_fpf3})
| . . |      THEN
| . . |      TrySubsume
| . . |      THEN
| . . |      Analyze 0
| . . |      THEN
| . . |      TrySubsume
| . . |
| . . .\
| . . . 1. A : Type
| . . . 2. A' : Type
| . . . 3. strong-subtype(A;A')
| . . . 4. B : A→Type
| . . . 5. C : A'→Type
| . . . 6. eq : EqDecider(A)
| . . . 7. eq' : EqDecider(A')
| . . . 8. f : a:A fp-> B(a)
| . . . 9. g : a:A fp-> B(a)
| . . . 10. A ⊆r A'
| . . . 11. eq' ∈ EqDecider(A)
| . . . 12. ∀a:A. B(a) ⊆r C(a)
| . . . 13. ∀x:A. x ∈ dom(f) ⇒ x ∈ dom(g) & f(x) = g(x)
| . . . 14. x : A
| . . . 15. x ∈ dom(f)
| . . . 16. x ∈ A
| . . . 17. x ∈ dom(g)
| . . . 18. f(x) = g(x)
| . . . 19. x ∈ dom(g)
| . . . ⊢  f(x) = g(x)  by All (Unfold `fpf-ap`) THEN HypSubst -2 0
| . . . |
| . . . |\
| . . . | 1. A : Type
| . . . | 2. A' : Type
| . . . | 3. strong-subtype(A;A')
| . . . | 4. B : A→Type
| . . . | 5. C : A'→Type
| . . . | 6. eq : EqDecider(A)
| . . . | 7. eq' : EqDecider(A')
| . . . | 8. f : a:A fp-> B(a)
| . . . | 9. g : a:A fp-> B(a)
| . . . | 10. A ⊆r A'
| . . . | 11. eq' ∈ EqDecider(A)
```

```
| . . . | 12. ∀a:A. B(a) ⊆r C(a)
| . . . | 13. ∀x:A. x ∈ dom(f) ⇒ x ∈ dom(g) & 2of(f)(x) = 2of(g)(x)
| . . . | 14. x : A
| . . . | 15. x ∈ dom(f)
| . . . | 16. x ∈ A
| . . . | 17. x ∈ dom(g)
| . . . | 18. 2of(f)(x) = 2of(g)(x)
| . . . | 19. x ∈ dom(g)
| . . . | ⊢  2of(g)(x) = 2of(g)(x)
| . . . | | by Fold ‘member‘ 0 THEN Subst ((2of(g)(x)) ∼ g(x)) 0
| . . . | |
| . . . | |\
| . . . | | .....equality .....
| . . . | | 1. A : Type
| . . . | | 2. A’ : Type
| . . . | | 3. strong-subtype(A;A’)
| . . . | | 4. B : A→Type
| . . . | | 5. C : A’→Type
| . . . | | 6. eq : EqDecider(A)
| . . . | | 7. eq’ : EqDecider(A’)
| . . . | | 8. f : a:A fp-> B(a)
| . . . | | 9. g : a:A fp-> B(a)
| . . . | | 10. A ⊆r A’
| . . . | | 11. eq’ ∈ EqDecider(A)
| . . . | | 12. ∀a:A. B(a) ⊆r C(a)
| . . . | | 13. ∀x:A. x ∈ dom(f) ⇒ x ∈ dom(g) & 2of(f)(x) = 2of(g)(x)
| . . . | | 14. x : A
| . . . | | 15. x ∈ dom(f)
| . . . | | 16. x ∈ A
| . . . | | 17. x ∈ dom(g)
| . . . | | 18. 2of(f)(x) = 2of(g)(x)
| . . . | | 19. x ∈ dom(g)
| . . . | | ⊢  (2of(g)(x)) ∼ g(x)  by Unfold ‘fpf-ap‘ 0
| . . . | |
| . . . | .\
| . . . | . 1. A : Type
| . . . | . 2. A’ : Type
| . . . | . 3. strong-subtype(A;A’)
| . . . | . 4. B : A→Type
| . . . | . 5. C : A’→Type
| . . . | . 6. eq : EqDecider(A)
| . . . | . 7. eq’ : EqDecider(A’)
| . . . | . 8. f : a:A fp-> B(a)
| . . . | . 9. g : a:A fp-> B(a)
| . . . | . 10. A ⊆r A’
| . . . | . 11. eq’ ∈ EqDecider(A)
| . . . | . 12. ∀a:A. B(a) ⊆r C(a)
| . . . | . 13. ∀x:A. x ∈ dom(f) ⇒ x ∈ dom(g) & 2of(f)(x) = 2of(g)(x)
| . . . | . 14. x : A
| . . . | . 15. x ∈ dom(f)
| . . . | . 16. x ∈ A
| . . . | . 17. x ∈ dom(g)
| . . . | . 18. 2of(f)(x) = 2of(g)(x)
| . . . | . 19. x ∈ dom(g)
| . . . | . ⊢  g(x) ∈ C(x)  by Auto
```

```
| . . . | . |
| . . . | . .....unproved Inclusion subgoal .....
| . . . | . 1. A : Type
| . . . | . 2. A' : Type
| . . . | . 3. strong-subtype(A;A')
| . . . | . 4. B : A→Type
| . . . | . 5. C : A'→Type
| . . . | . 6. eq : EqDecider(A)
| . . . | . 7. eq' : EqDecider(A')
| . . . | . 8. f : a:A fp-> B(a)
| . . . | . 9. g : a:A fp-> B(a)
| . . . | . 10. A ⊆r A'
| . . . | . 11. eq' ∈ EqDecider(A)
| . . . | . 12. ∀a:A. B(a) ⊆r C(a)
| . . . | . 13. ∀x:A. x ∈ dom(f) ⇒ x ∈ dom(g) & 2of(f)(x) = 2of(g)(x)
| . . . | . 14. x : A
| . . . | . 15. x ∈ dom(f)
| . . . | . 16. x ∈ A
| . . . | . 17. x ∈ dom(g)
| . . . | . 18. 2of(f)(x) = 2of(g)(x)
| . . . | . 19. x ∈ dom(g)
| . . . | . 20. g(x) = g(x)
| . . . | . 21. zzz : B(x)
| . . . | . ⊢  zzz ∈ C(x)  by DoSubsume
| . . . | . |
| . . . | . .....subtype_rel .....
| . . . | . 1. A : Type
| . . . | . 2. A' : Type
| . . . | . 3. strong-subtype(A;A')
| . . . | . 4. B : A→Type
| . . . | . 5. C : A'→Type
| . . . | . 6. eq : EqDecider(A)
| . . . | . 7. eq' : EqDecider(A')
| . . . | . 8. f : a:A fp-> B(a)
| . . . | . 9. g : a:A fp-> B(a)
| . . . | . 10. A ⊆r A'
| . . . | . 11. eq' ∈ EqDecider(A)
| . . . | . 12. ∀a:A. B(a) ⊆r C(a)
| . . . | . 13. ∀x:A. x ∈ dom(f) ⇒ x ∈ dom(g) & 2of(f)(x) = 2of(g)(x)
| . . . | . 14. x : A
| . . . | . 15. x ∈ dom(f)
| . . . | . 16. x ∈ A
| . . . | . 17. x ∈ dom(g)
| . . . | . 18. 2of(f)(x) = 2of(g)(x)
| . . . | . 19. x ∈ dom(g)
| . . . | . 20. g(x) = g(x)
| . . . | . 21. B(x)
| . . . | . ⊢  (B(x)) ⊆r (C(x))  by BackThruSomeHyp
| . . . |
| . . . .\
| . . . . .....wf .....
| . . . . 1. A : Type
| . . . . 2. A' : Type
| . . . . 3. strong-subtype(A;A')
| . . . . 4. B : A→Type
```

```
| . . . . 5. C : A'→Type
| . . . . 6. eq : EqDecider(A)
| . . . . 7. eq' : EqDecider(A')
| . . . . 8. f : a:A fp-> B(a)
| . . . . 9. g : a:A fp-> B(a)
| . . . . 10. A ⊆r A'
| . . . . 11. eq' ∈ EqDecider(A)
| . . . . 12. ∀a:A. B(a) ⊆r C(a)
| . . . . 13. ∀x:A. x ∈ dom(f) ⇒ x ∈ dom(g) & 2of(f)(x) = 2of(g)(x)
| . . . . 14. x : A
| . . . . 15. x ∈ dom(f)
| . . . . 16. x ∈ A
| . . . . 17. x ∈ dom(g)
| . . . . 18. 2of(f)(x) = 2of(g)(x)
| . . . . 19. x ∈ dom(g)
| . . . . 20. z : B(x)
| . . . . ⊢  (z = 2of(g)(x)) ∈ Prop  by Analyze
| . . . . |
| . . . . |\
| . . . . | .....subterm .....
| . . . . | 1. A : Type
| . . . . | 2. A' : Type
| . . . . | 3. strong-subtype(A;A')
| . . . . | 4. B : A→Type
| . . . . | 5. C : A'→Type
| . . . . | 6. eq : EqDecider(A)
| . . . . | 7. eq' : EqDecider(A')
| . . . . | 8. f : a:A fp-> B(a)
| . . . . | 9. g : a:A fp-> B(a)
| . . . . | 10. A ⊆r A'
| . . . . | 11. eq' ∈ EqDecider(A)
| . . . . | 12. ∀a:A. B(a) ⊆r C(a)
| . . . . | 13. ∀x:A. x ∈ dom(f) ⇒ x ∈ dom(g) & 2of(f)(x) = 2of(g)(x)
| . . . . | 14. x : A
| . . . . | 15. x ∈ dom(f)
| . . . . | 16. x ∈ A
| . . . . | 17. x ∈ dom(g)
| . . . . | 18. 2of(f)(x) = 2of(g)(x)
| . . . . | 19. x ∈ dom(g)
| . . . . | 20. B(x)
| . . . . | ⊢  C(x) ∈ Type  by Auto THEN TrySubsume
| . . . . |
| . . . . |\
| . . . . | .....subterm .....
| . . . . | 1. A : Type
| . . . . | 2. A' : Type
| . . . . | 3. strong-subtype(A;A')
| . . . . | 4. B : A→Type
| . . . . | 5. C : A'→Type
| . . . . | 6. eq : EqDecider(A)
| . . . . | 7. eq' : EqDecider(A')
| . . . . | 8. f : a:A fp-> B(a)
| . . . . | 9. g : a:A fp-> B(a)
| . . . . | 10. A ⊆r A'
| . . . . | 11. eq' ∈ EqDecider(A)
```

```
| . . . . | 12. ∀a:A. B(a) ⊆r C(a)
| . . . . | 13. ∀x:A. x ∈ dom(f) ⇒ x ∈ dom(g) & 2of(f)(x) = 2of(g)(x)
| . . . . | 14. x : A
| . . . . | 15. x ∈ dom(f)
| . . . . | 16. x ∈ A
| . . . . | 17. x ∈ dom(g)
| . . . . | 18. 2of(f)(x) = 2of(g)(x)
| . . . . | 19. x ∈ dom(g)
| . . . . | 20. z : B(x)
| . . . . | ⊢  z ∈ C(x)  by DoSubsume
| . . . . | |
| . . . . | .....subtype_rel .....
| . . . . | 1. A : Type
| . . . . | 2. A' : Type
| . . . . | 3. strong-subtype(A;A')
| . . . . | 4. B : A→Type
| . . . . | 5. C : A'→Type
| . . . . | 6. eq : EqDecider(A)
| . . . . | 7. eq' : EqDecider(A')
| . . . . | 8. f : a:A fp-> B(a)
| . . . . | 9. g : a:A fp-> B(a)
| . . . . | 10. A ⊆r A'
| . . . . | 11. eq' ∈ EqDecider(A)
| . . . . | 12. ∀a:A. B(a) ⊆r C(a)
| . . . . | 13. ∀x:A. x ∈ dom(f) ⇒ x ∈ dom(g) & 2of(f)(x) = 2of(g)(x)
| . . . . | 14. x : A
| . . . . | 15. x ∈ dom(f)
| . . . . | 16. x ∈ A
| . . . . | 17. x ∈ dom(g)
| . . . . | 18. 2of(f)(x) = 2of(g)(x)
| . . . . | 19. x ∈ dom(g)
| . . . . | 20. B(x)
| . . . . | ⊢  B(x) ⊆r C(x)  by BackThruSomeHyp
| . . . . |
| . . . . .\
| . . . . . .....subterm .....
| . . . . . 1. A : Type
| . . . . . 2. A' : Type
| . . . . . 3. strong-subtype(A;A')
| . . . . . 4. B : A→Type
| . . . . . 5. C : A'→Type
| . . . . . 6. eq : EqDecider(A)
| . . . . . 7. eq' : EqDecider(A')
| . . . . . 8. f : a:A fp-> B(a)
| . . . . . 9. g : a:A fp-> B(a)
| . . . . . 10. A ⊆r A'
| . . . . . 11. eq' ∈ EqDecider(A)
| . . . . . 12. ∀a:A. B(a) ⊆r C(a)
| . . . . . 13. ∀x:A. x ∈ dom(f) ⇒ x ∈ dom(g) & 2of(f)(x) = 2of(g)(x)
| . . . . . 14. x : A
| . . . . . 15. x ∈ dom(f)
| . . . . . 16. x ∈ A
| . . . . . 17. x ∈ dom(g)
| . . . . . 18. 2of(f)(x) = 2of(g)(x)
| . . . . . 19. x ∈ dom(g)
```

```
| . . . . . 20. B(x)
| . . . . . ⊢  2of(g)(x) ∈ C(x)  by Subst ((2of(g)(x)) ∼ g(x)) 0
| . . . . . |
| . . . . . |\
| . . . . . | .....equality .....
| . . . . . | 1. A : Type
| . . . . . | 2. A' : Type
| . . . . . | 3. strong-subtype(A;A')
| . . . . . | 4. B : A→Type
| . . . . . | 5. C : A'→Type
| . . . . . | 6. eq : EqDecider(A)
| . . . . . | 7. eq' : EqDecider(A')
| . . . . . | 8. f : a:A fp-> B(a)
| . . . . . | 9. g : a:A fp-> B(a)
| . . . . . | 10. A ⊆r A'
| . . . . . | 11. eq' ∈ EqDecider(A)
| . . . . . | 12. ∀a:A. B(a) ⊆r C(a)
| . . . . . | 13. ∀x:A.
| . . . . . |     x ∈ dom(f) ⇒ x ∈ dom(g) & 2of(f)(x) = 2of(g)(x)
| . . . . . | 14. x : A
| . . . . . | 15. x ∈ dom(f)
| . . . . . | 16. x ∈ A
| . . . . . | 17. x ∈ dom(g)
| . . . . . | 18. 2of(f)(x) = 2of(g)(x)
| . . . . . | 19. x ∈ dom(g)
| . . . . . | 20. B(x)
| . . . . . | ⊢  (2of(g)(x)) ∼ g(x)  by Unfold `fpf-ap` 0
| . . . . . |
| . . . . . .\
| . . . . . . 1. A : Type
| . . . . . . 2. A' : Type
| . . . . . . 3. strong-subtype(A;A')
| . . . . . . 4. B : A→Type
| . . . . . . 5. C : A'→Type
| . . . . . . 6. eq : EqDecider(A)
| . . . . . . 7. eq' : EqDecider(A')
| . . . . . . 8. f : a:A fp-> B(a)
| . . . . . . 9. g : a:A fp-> B(a)
| . . . . . . 10. A ⊆r A'
| . . . . . . 11. eq' ∈ EqDecider(A)
| . . . . . . 12. ∀a:A. B(a) ⊆r C(a)
| . . . . . . 13. ∀x:A.
| . . . . . . |   x ∈ dom(f) ⇒ x ∈ dom(g) & 2of(f)(x) = 2of(g)(x)
| . . . . . . 14. x : A
| . . . . . . 15. x ∈ dom(f)
| . . . . . . 16. x ∈ A
| . . . . . . 17. x ∈ dom(g)
| . . . . . . 18. 2of(f)(x) = 2of(g)(x)
| . . . . . . 19. x ∈ dom(g)
| . . . . . . 20. B(x)
| . . . . . . ⊢  g(x) ∈ C(x)  by DoSubsume
| . . . . . . |
| . . . . . . .....subtype_rel .....
| . . . . . . 1. A : Type
| . . . . . . 2. A' : Type
```

```
| . . . . . . . 3. strong-subtype(A;A')
| . . . . . . . 4. B : A→Type
| . . . . . . . 5. C : A'→Type
| . . . . . . . 6. eq : EqDecider(A)
| . . . . . . . 7. eq' : EqDecider(A')
| . . . . . . . 8. f : a:A fp-> B(a)
| . . . . . . . 9. g : a:A fp-> B(a)

| . . . . . . . 10. A ⊆r A'
| . . . . . . . 11. eq' ∈ EqDecider(A)
| . . . . . . . 12. ∀a:A. B(a) ⊆r C(a)
| . . . . . . . 13. ∀x:A.
| . . . . . . .     x ∈ dom(f) ⇒ x ∈ dom(g) & 2of(f)(x) = 2of(g)(x)
| . . . . . . . 14. x : A
| . . . . . . . 15. x ∈ dom(f)
| . . . . . . . 16. x ∈ A
| . . . . . . . 17. x ∈ dom(g)
| . . . . . . . 18. 2of(f)(x) = 2of(g)(x)
| . . . . . . . 19. x ∈ dom(g)
| . . . . . . . 20. B(x)
| . . . . . . . ⊢  B(x) ⊆r C(x)  by BackThruSomeHyp
|
.\
. .....wf .....
. 1. A : Type
. 2. A' : Type
. 3. strong-subtype(A;A')
. 4. B : A→Type
. 5. C : A'→Type
. 6. eq : EqDecider(A)
. 7. eq' : EqDecider(A')
. 8. f : a:A fp-> B(a)
. 9. g : a:A fp-> B(a)
. 10. A ⊆r A'
. 11. eq' ∈ EqDecider(A)
. 12. ∀a:A. B(a) ⊆r C(a)
. 13. ∀x:A. x ∈ dom(f) ⇒ x ∈ dom(g) & f(x) = g(x)
. 14. x : A
. ⊢  x ∈ dom(f) ∈ Prop
.   by Auto THEN DoSubsume
.      THEN
.      BackThru
.      Thm* ∀B1:(A1→Type), B2:(A2→Type).
.           strong-subtype(A1;A2)
.           ⇒
.           (∀a:A1. B1(a) ⊆r B2(a))
.           ⇒
.           (a:A1 fp-> B1(a) ⊆r a:A2 fp-> B2(a))
.      {subtype_DASH_fpf3}
.      THEN
.      Analyze 0
END
```