```
append_split2  THM

⊢  ∀T:Type, L:T List, P:(ℕ||L||→Prop).
|  (∀x:ℕ||L||. Dec(P(x)))
|  ⇒
|  (∀i,j:ℕ||L||. P(i) ⇒ i<j ⇒ P(j))
|  ⇒
|  (∃L_1,L_2:T List. L = (L_1 @ L_2) & (∀i:ℕ||L||. P(i) ⟺ ||L_1||≤i))
| by Auto THEN Decide ∃i:ℕ||L||. P(i) & (∀j:ℕi. ¬P(j)) THEN Auto
|
|\
| 1. T : Type
| 2. L : T List
| 3. P : ℕ||L||→Prop
| 4. ∀x:ℕ||L||. Dec(P(x))
| 5. ∀i,j:ℕ||L||. P(i) ⇒ i<j ⇒ P(j)
| 6. ∃i:ℕ||L||. P(i) & (∀j:ℕi. ¬P(j))
| ⊢  ∃L_1,L_2:T List. L = (L_1 @ L_2) & (∀i:ℕ||L||. P(i) ⟺ ||L_1||≤i)
| | by ExRepD
| |
| 1. T : Type
| 2. L : T List
| 3. P : ℕ||L||→Prop
| 4. ∀x:ℕ||L||. Dec(P(x))
| 5. ∀i,j:ℕ||L||. P(i) ⇒ i<j ⇒ P(j)
| 6. i : ℕ||L||
| 7. P(i)
| 8. ∀j:ℕi. ¬P(j)
| ⊢  ∃L_1,L_2:T List. L = (L_1 @ L_2) & (∀i:ℕ||L||. P(i) ⟺ ||L_1||≤i)
| | by InstConcl [firstn(i;L);nth_tl(i;L)] THEN Auto
| |
| |\
| | 1. T : Type
| | 2. L : T List
| | 3. P : ℕ||L||→Prop
| | 4. ∀x:ℕ||L||. Dec(P(x))
| | 5. ∀i,j:ℕ||L||. P(i) ⇒ i<j ⇒ P(j)
| | 6. i : ℕ||L||
| | 7. P(i)
| | 8. ∀j:ℕi. ¬P(j)
| | ⊢  L = (firstn(i;L) @ nth_tl(i;L))
| |   by Symmetry THEN BackThruLemma ‘append_firstn_lastn‘ THEN Auto
| |
| |\
| | 1. T : Type
| | 2. L : T List
| | 3. P : ℕ||L||→Prop
| | 4. ∀x:ℕ||L||. Dec(P(x))
| | 5. ∀i,j:ℕ||L||. P(i) ⇒ i<j ⇒ P(j)
| | 6. i : ℕ||L||
| | 7. P(i)
| | 8. ∀j:ℕi. ¬P(j)
| | 9. i@0 : ℕ||L||
| | 10. P(i@0)
| | ⊢  ||firstn(i;L)||≤i@0
```

```
| | | by RWO "length_firstn" 0 THEN Auto THEN SupposeNot
| | |
| | 1. T : Type
| | 2. L : T List
| | 3. P : ℕ||L||→Prop
| | 4. ∀x:ℕ||L||. Dec(P(x))
| | 5. ∀i,j:ℕ||L||. P(i) ⇒ i<j ⇒ P(j)
| | 6. i : ℕ||L||
| | 7. P(i)
| | 8. ∀j:ℕi. ¬P(j)
| | 9. i@0 : ℕ||L||
| | 10. P(i@0)
| | 11. ¬i≤i@0
| | ⊢  i≤i@0  by InstHyp [i@0] (-4) THEN Auto
| |
| .\
| . 1. T : Type
| . 2. L : T List
| . 3. P : ℕ||L||→Prop
| . 4. ∀x:ℕ||L||. Dec(P(x))
| . 5. ∀i,j:ℕ||L||. P(i) ⇒ i<j ⇒ P(j)
| . 6. i : ℕ||L||
| . 7. P(i)
| . 8. ∀j:ℕi. ¬P(j)
| . 9. i@0 : ℕ||L||
| . 10. ||firstn(i;L)||≤i@0
| . ⊢  P(i@0)
| . | by RWO "length_firstn" (-1) THEN Auto
| . THEN Decide i@0 = i
| . |     THENA Auto
| . |
| . |\
| . | 1. T : Type
| . | 2. L : T List
| . | 3. P : ℕ||L||→Prop
| . | 4. ∀x:ℕ||L||. Dec(P(x))
| . | 5. ∀i,j:ℕ||L||. P(i) ⇒ i<j ⇒ P(j)
| . | 6. i : ℕ||L||
| . | 7. P(i)
| . | 8. ∀j:ℕi. ¬P(j)
| . | 9. i@0 : ℕ||L||
| . | 10. i≤i@0
| . | 11. i@0 = i
| . | ⊢  P(i@0)  by HypSubstSq (-1) 0 THEN Trivial
| . |
| . .\
| . . 1. T : Type
| . . 2. L : T List
| . . 3. P : ℕ||L||→Prop
| . . 4. ∀x:ℕ||L||. Dec(P(x))
| . . 5. ∀i,j:ℕ||L||. P(i) ⇒ i<j ⇒ P(j)
| . . 6. i : ℕ||L||
| . . 7. P(i)
| . . 8. ∀j:ℕi. ¬P(j)
| . . 9. i@0 : ℕ||L||
```

```
| . . 10. i≤i@0
| . . 11. ¬i@0 = i
| . . ⊢  P(i@0)  by InstHyp [i;i@0] 5 THEN Auto
|
.\
. 1. T : Type
. 2. L : T List
. 3. P : ℕ||L||→Prop
. 4. ∀x:ℕ||L||. Dec(P(x))
. 5. ∀i,j:ℕ||L||. P(i) ⇒ i<j ⇒ P(j)
. 6. ¬(∃i:ℕ||L||. P(i) & (∀j:ℕi. ¬P(j)))
. ⊢  ∃L_1,L_2:T List. L = (L_1 @ L_2) & (∀i:ℕ||L||. P(i) ⟺ ||L_1||≤i)
. | by InstConcl [L;nil] THEN Auto
. |
. |\
. | 1. T : Type
. | 2. L : T List
. | 3. P : ℕ||L||→Prop
. | 4. ∀x:ℕ||L||. Dec(P(x))
. | 5. ∀i,j:ℕ||L||. P(i) ⇒ i<j ⇒ P(j)
. | 6. ¬(∃i:ℕ||L||. P(i) & (∀j:ℕi. ¬P(j)))
. | ⊢  L = (L @ nil)
. |   by Symmetry THEN BackThruLemma ‘append_back_nil‘ THEN Auto
. |
. .\
. . 1. T : Type
. . 2. L : T List
. . 3. P : ℕ||L||→Prop
. . 4. ∀x:ℕ||L||. Dec(P(x))
. . 5. ∀i,j:ℕ||L||. P(i) ⇒ i<j ⇒ P(j)
. . 6. ¬(∃i:ℕ||L||. P(i) & (∀j:ℕi. ¬P(j)))
. . 7. i : ℕ||L||
. . 8. P(i)
. . ⊢  ||L||≤i
. . | by ...
. . |
. . |\
. . | 1. T : Type
. . | 2. L : T List
. . | 3. P : ℕ||L||→Prop
. . | 4. ∀x:ℕ||L||. Dec(P(x))
. . | 5. ∀i,j:ℕ||L||. P(i) ⇒ i<j ⇒ P(j)
. . | 6. 0≤0
. . | 7. 0<||L||
. . | 8. P(0)
. . | ⊢  ∃i:ℕ||L||. P(i) & (∀j:ℕi. ¬P(j))  by InstConcl [0] THEN Auto
. . |
. . .\
. . . 1. T : Type
. . . 2. L : T List
. . . 3. P : ℕ||L||→Prop
. . . 4. ∀x:ℕ||L||. Dec(P(x))
. . . 5. ∀i,j:ℕ||L||. P(i) ⇒ i<j ⇒ P(j)
. . . 6. i : ℤ
. . . 7. 0<i
```

```
. . . 8. 0 ≤ i-1 < ||L||
. . . |  ⇒
. . . |  P(i-1) ⇒ (∃i:ℕ||L||. P(i) & (∀j:ℕi. ¬P(j)))
. . . 9. 0≤i
. . . 10. i<||L||
. . . 11. P(i)
. . . ⊢  ∃i:ℕ||L||. P(i) & (∀j:ℕi. ¬P(j))
. . . | by InstHyp [i-1] 4 THENA Auto THEN D (-1)
. . . |
. . . |\
. . . | 1. T : Type
. . . | 2. L : T List
. . . | 3. P : ℕ||L||→Prop
. . . | 4. ∀x:ℕ||L||. Dec(P(x))
. . . | 5. ∀i,j:ℕ||L||. P(i) ⇒ i<j ⇒ P(j)
. . . | 6. i : ℤ
. . . | 7. 0<i
. . . | 8. 0 ≤ i-1 < ||L||
. . . |    ⇒
. . . |    P(i-1) ⇒ (∃i:ℕ||L||. P(i) & (∀j:ℕi. ¬P(j)))
. . . | 9. 0≤i
. . . | 10. i<||L||
. . . | 11. P(i)
. . . | 12. P(i-1)
. . . | ⊢  ∃i:ℕ||L||. P(i) & (∀j:ℕi. ¬P(j))
. . . |   by BackThruSomeHyp THEN Auto
. . . |
. . . .\
. . . . 1. T : Type
. . . . 2. L : T List
. . . . 3. P : ℕ||L||→Prop
. . . . 4. ∀x:ℕ||L||. Dec(P(x))
. . . . 5. ∀i,j:ℕ||L||. P(i) ⇒ i<j ⇒ P(j)
. . . . 6. i : ℤ
. . . . 7. 0<i
. . . . 8. 0 ≤ i-1 < ||L||
. . . . |  ⇒
. . . . |  P(i-1) ⇒ (∃i:ℕ||L||. P(i) & (∀j:ℕi. ¬P(j)))
. . . . 9. 0≤i
. . . . 10. i<||L||
. . . . 11. P(i)
. . . . 12. ¬P(i-1)
. . . . ⊢  ∃i:ℕ||L||. P(i) & (∀j:ℕi. ¬P(j))
. . . . | by InstConcl [i] THEN Auto
. . . . |
. . . . 1. T : Type
. . . . 2. L : T List
. . . . 3. P : ℕ||L||→Prop
. . . . 4. ∀x:ℕ||L||. Dec(P(x))
. . . . 5. ∀i,j:ℕ||L||. P(i) ⇒ i<j ⇒ P(j)
. . . . 6. i : ℤ
. . . . 7. 0<i
. . . . 8. 0 ≤ i-1 < ||L||
. . . . |  ⇒
. . . . |  P(i-1) ⇒ (∃i:ℕ||L||. P(i) & (∀j:ℕi. ¬P(j)))
```

```
. . . . 9. 0≤i
. . . . 10. i<||L||
. . . . 11. P(i)
. . . . 12. ¬P(i-1)
. . . . 13. j : ℕi
. . . . ⊢  ¬P(j)  by ParallelOp (-2)
. . . . |
. . . . 1. T : Type
. . . . 2. L : T List
. . . . 3. P : ℕ||L||→Prop
. . . . 4. ∀x:ℕ||L||. Dec(P(x))
. . . . 5. ∀i,j:ℕ||L||. P(i) ⇒ i<j ⇒ P(j)
. . . . 6. i : ℤ
. . . . 7. 0<i
. . . . 8. 0 ≤ i-1 < ||L||
. . . . |  ⇒
. . . . |  P(i-1) ⇒ (∃i:ℕ||L||. P(i) & (∀j:ℕi. ¬P(j)))
. . . . 9. 0≤i
. . . . 10. i<||L||
. . . . 11. P(i)
. . . . 12. j : ℕi
. . . . 13. P(j)
. . . . ⊢  P(i-1)  by Decide j = i-1 THENA Auto
. . . . |
. . . . |\
. . . . | 1. T : Type
. . . . | 2. L : T List
. . . . | 3. P : ℕ||L||→Prop
. . . . | 4. ∀x:ℕ||L||. Dec(P(x))
. . . . | 5. ∀i,j:ℕ||L||. P(i) ⇒ i<j ⇒ P(j)
. . . . | 6. i : ℤ
. . . . | 7. 0<i
. . . . | 8. 0 ≤ i-1 < ||L||
. . . . |    ⇒
. . . . |    P(i-1) ⇒ (∃i:ℕ||L||. P(i) & (∀j:ℕi. ¬P(j)))
. . . . | 9. 0≤i
. . . . | 10. i<||L||
. . . . | 11. P(i)
. . . . | 12. j : ℕi
. . . . | 13. P(j)
. . . . | 14. j = i-1
. . . . | ⊢  P(i-1)  by RevHypSubstSq (-1) 0 THEN Trivial
. . . . |
. . . . .\
. . . . . 1. T : Type
. . . . . 2. L : T List
. . . . . 3. P : ℕ||L||→Prop
. . . . . 4. ∀x:ℕ||L||. Dec(P(x))
. . . . . 5. ∀i,j:ℕ||L||. P(i) ⇒ i<j ⇒ P(j)
. . . . . 6. i : ℤ
. . . . . 7. 0<i
. . . . . 8. 0 ≤ i-1 < ||L||
. . . . .    ⇒
. . . . .    P(i-1) ⇒ (∃i:ℕ||L||. P(i) & (∀j:ℕi. ¬P(j)))
. . . . . 9. 0≤i
```

```
. . . . . 10. i<||L||
. . . . . 11. P(i)
. . . . . 12. j : ℕi
. . . . . 13. P(j)
. . . . . 14. ¬j = i-1
. . . . . ⊢  P(i-1)  by InstHyp [j;i-1] 5 THEN Auto
END
```