```
preserved_by_star  THM

⊢  ∀T:Type, P:(T→Prop), R:(T→T→Prop).
|  R preserves P ⇒ R^* preserves P
| by Unfold ‘preserved_by‘ 0 THEN Auto
|
1. T : Type
2. P : T→Prop
3. R : T→T→Prop
4. ∀x,y:T. P(x) ⇒ (x R y) ⇒ P(y)
5. x : T
6. y : T
7. P(x)
8. x (R^*) y
⊢  P(y)  by Unfold ‘rel_star‘ (-1) THEN Reduce (-1) THEN ExRepD
|
1. T : Type
2. P : T→Prop
3. R : T→T→Prop
4. ∀x,y:T. P(x) ⇒ (x R y) ⇒ P(y)
5. x : T
6. y : T
7. P(x)
8. n : ℕ
9. x R^n y
⊢  P(y)
| by ...
THEN Auto’
|
|\
| 1. T : Type
| 2. P : T→Prop
| 3. R : T→T→Prop
| 4. ∀x,y:T. P(x) ⇒ (x R y) ⇒ P(y)
| 5. 0≥0
| 6. x : T
| 7. y : T
| 8. P(x)
| 9. x R^0 y
| ⊢  P(y)  by ReduceExp (-1) THEN RevHypSubst (-1) 0 THEN Auto
|
.\
. 1. T : Type
. 2. P : T→Prop
. 3. R : T→T→Prop
. 4. ∀x,y:T. P(x) ⇒ (x R y) ⇒ P(y)
. 5. n : ℤ
. 6. 0<n
. 7. n-1≥0 ⇒ (∀x,y:T. P(x) ⇒ (x R^n-1 y) ⇒ P(y))
. 8. n≥0
. 9. x : T
. 10. y : T
. 11. P(x)
. 12. x R^n y
. ⊢  P(y)
```

```
. | by MoveToConcl (-1) THEN RecUnfold ‘rel_exp‘ 0 THEN Reduce 0 THEN
. |
. SplitOnConclITE THEN Reduce 0 THEN Auto’
. |
. 1. T : Type
. 2. P : T→Prop
. 3. R : T→T→Prop
. 4. ∀x,y:T. P(x) ⇒ (x R y) ⇒ P(y)
. 5. n : ℤ
. 6. 0<n
. 7. n-1≥0 ⇒ (∀x,y:T. P(x) ⇒ (x R^n-1 y) ⇒ P(y))
. 8. n≥0
. 9. x : T
. 10. y : T
. 11. P(x)
. 12. ¬n = 0
. 13. ∃z:T. (x R z) & (z R^n-1 y)
. ⊢  P(y)  by ExRepD
. |
. 1. T : Type
. 2. P : T→Prop
. 3. R : T→T→Prop
. 4. ∀x,y:T. P(x) ⇒ (x R y) ⇒ P(y)
. 5. n : ℤ
. 6. 0<n
. 7. n-1≥0 ⇒ (∀x,y:T. P(x) ⇒ (x R^n-1 y) ⇒ P(y))
. 8. n≥0
. 9. x : T
. 10. y : T
. 11. P(x)
. 12. ¬n = 0
. 13. z : T
. 14. x R z
. 15. z R^n-1 y
. ⊢  P(y)  by AllHyps (\h. FwdThruHyp h [(-5);(-2)]) THEN Auto
. |
. 1. T : Type
. 2. P : T→Prop
. 3. R : T→T→Prop
. 4. ∀x,y:T. P(x) ⇒ (x R y) ⇒ P(y)
. 5. n : ℤ
. 6. 0<n
. 7. n-1≥0 ⇒ (∀x,y:T. P(x) ⇒ (x R^n-1 y) ⇒ P(y))
. 8. n≥0
. 9. x : T
. 10. y : T
. 11. P(x)

. 12. ¬n = 0
. 13. z : T
. 14. x R z
. 15. z R^n-1 y
. 16. P(z)
. ⊢  P(y)  by Using [‘x’,z] (BackThruSomeHyp THEN Auto)
END
```